This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

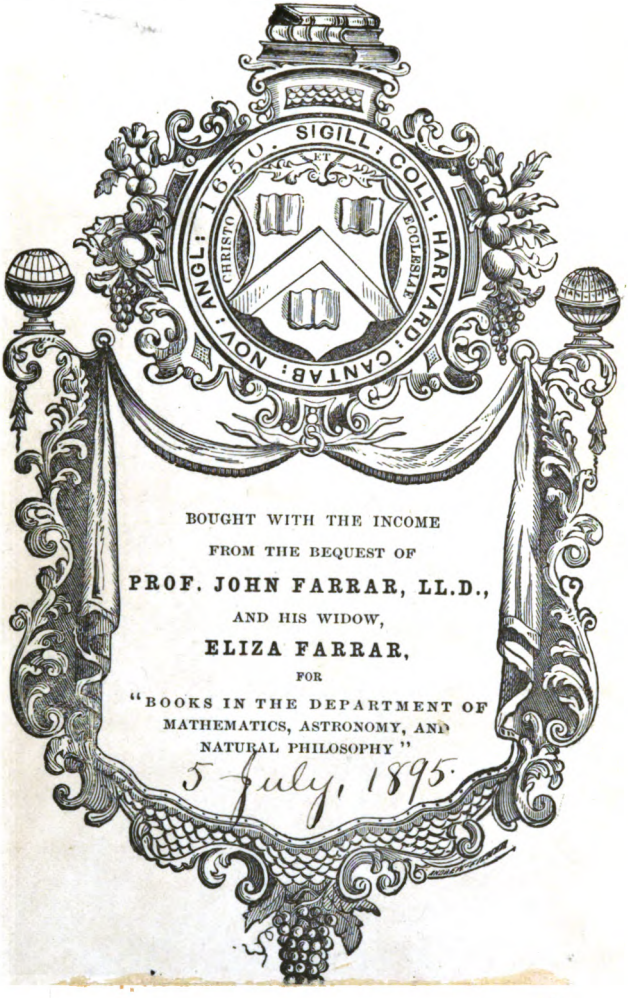
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Math 358.95



BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"
5 July, 1895.

SCIENCE CENTER LIBRARY

Digitized by Google

Methodisches Lehrbuch

der

Elementar-Mathematik

von

Dr. Gustav Holzmüller,

Direktor der Gewerbeschule (Realschule mit Fachklassen) zu Hagen i. W.,
Mitglied der Kais. Leop. Carol. Akademie der Naturforscher.

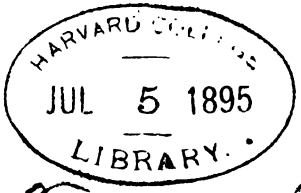
Zweiter Teil,
für die drei Oberklassen der höheren Lehranstalten bestimmt.

Mit 210 Figuren im Text.

Leipzig,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1894.

Digitized by Google

VI. 8433
Math 358.95



Sartori Fund.

Alle Rechte,
einschließlich des Übersetzungsrechts, vorbehalten.

Digitized by Google

Vorwort.

Der zweite Teil des methodischen Lehrbuchs, den ich hiermit den Fachgenossen übergebe, umfaßt den Lehrstoff der drei Oberklassen des Gymnasiums und des Realgymnasiums. Da einzelne Schulen noch etwas weiter gehen möchten, und da außerdem noch den Bedürfnissen der Ober-Realschulen und der höher organisierten Fachschulen genügt werden muß, soll demnächst noch ein besonderes Ergänzungsheft erscheinen.

Über die Methode und die Auswahl des Lehrstoffs habe ich mich auch für diesen zweiten Teil in einem Begleitworte, welches den Lehrern der Mathematik von der Verlagsbuchhandlung gern zur Verfügung gestellt wird, ausführlicher ausgesprochen. Hier sei nur bemerkt, daß die Einteilung nach Jahrgängen für die Oberklassen unterbleiben mußte, weil diese bei den genannten Schulgruppen bezüglich des Lehrplans in weit höherem Grade auseinandergehen, als es bei den Mittelklassen der Fall ist.

Der erste Teil wurde sofort nach dem Erscheinen an mehreren Schulen Preußens und außerdem in Braunschweig und der Schweiz eingeführt, sodaß voraussichtlich schon das nächste Jahr eine neue Auflage verlangt. Etwaige Wünsche und Verbesserungsvorschläge der Herren Kollegen werde ich gern berücksichtigen, wenn sie mir bis zum Herbste dieses Jahres zugehen.

Bezüglich des vorliegenden Teiles bin ich zweien meiner Kollegen zu besonderem Danke verpflichtet. Herr Ingenieur Zimmermann erbot sich bei meiner Geschäftsüberhäufung zur exakten Herstellung der Mehrzahl der von mir nur skizzierten Figuren, deren korrekte Ausführung wohl auch den größten Anforderungen entsprechen dürfte. Herr Gewerbeschullehrer Spannagel unterstützte mich wesentlich beim

Digitized by Google

Lesen der Korrekturbogen. Endlich muß ich noch der Verlagsbuchhandlung für das bereitwillige Entgegenkommen hinsichtlich der kostspieligen Ausstattung des Werkes mit einer ungewöhnlich großen Figurenzahl den verbindlichsten Dank aussprechen.

Möge das Buch seinen Zweck erfüllen und namentlich zu einem gesunden Betriebe der neuen Lehrpläne einigermaßen beitragen.

Hagen i/W., im Juli 1894.

Dr. G. Holzmüller.

Digitized by Google

Inhalts-Verzeichnis.

Erste Abteilung.

Geometrie der Geraden und des Kreises.

		Seite
I.	Übungen am Sehnenviereck und am regelmäßigen Kreisvieleck	1
II.	Übungen an den Dreieckskreisen	7
	a) Die Radien der vier Berührungskreise des Dreiecks	7
	b) Der Radius des Um-Kreises und seine Beziehungen zu den Seiten und Berührungskreisen des Dreiecks	10
III.	Beziehungen zwischen den Seiten, Höhen, Mittellinien und Winkelhalbierenden des Dreiecks	15
IV.	Allgemeine Bemerkungen über Konstruktionsaufgaben	19
	Lösungen mit Hülfe von Lehrsätzen	20
	Methode der Symmetrie oder der Spiegelbilder	22
	Methode der Parallelverschiebungen	23
	Methode der Ähnlichkeit	24
	Methode der Umkehrung der Aufgabe	26
	Methode der Drehung	26
	Methode des geometrischen Ortes	28
	Methode der algebraischen Analysis	29
V.	Übergang zur neueren Geometrie	30
	Satz des Ceva	30
	Satz des Menelaos	32
	Anwendungen auf vollständiges Vierseit, Pascalschen Satz und Ähnlichkeitsachsen dreier Kreise	33
VI.	Harmonische Punkte und Strahlen	37
VII.	Ähnlichkeitspunkte und Pascalscher Satz	42
VIII.	Harmonische Punkte und Strahlen am Kreise, Pol und Polare	48
IX.	Die Inversion oder Spiegelung mittels reciproker Radien	56
X.	Potenz und Potenzlinien	63
XI.	Einige Berührungsaufgaben	69
XII.	Kartographische Anwendungen	71
	Mercatorkarte, Karte der nördlichen und südlichen, der östlichen und westlichen Halbkugel, Halbkugel der größten und kleinsten Wassermasse nach Hipparch-Ptolemäus	71

Digitized by Google

Seite

XIII. Der Koordinatenbegriff 78
a) Graphische Darstellungen 78
b) Die Koordinaten von Punkten 82
c) Die Gleichung ersten Grades und die gerade Linie 85
d) Die Gleichung des Kreises 90

Zweite Abteilung.

Arithmetik.

I. Geometrische Reihen 96
a) Die geometrische Reihe mit endlicher Gliederzahl 96
b) Anwendung auf die Rentenrechnung 99
c) Die geometrischen Reihen mit unendlich großer Gliederzahl . 102
II. Arithmetische Reihen 107
a) Arithmetische Reihen erster Ordnung 107
b) Einige arithmetische Reihen höherer Ordnung 109
III. Der binomische Lehrsatz für ganze positive Exponenten 112
IV. Ableitung gewisser arithmetischer Reihen höherer Ordnung mit Hülfe des binomischen Lehrsatzes 115
V. Die Exponentialreihe und die natürlichen Logarithmen 120
VI. Der Moivresche Lehrsatz und einige aus ihm abgeleitete Reihen. 125
VII. Die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen und der n^{ten} Wurzeln aus der Einheit und aus anderen Zahlen 131
VIII. Reciproke Gleichungen und Anwendung derselben auf reducierbare Gleichungen höheren Grades 138
IX. Einiges über Gleichungen mit mehreren Unbekannten 148

Dritte Abteilung.

Trigonometrie.

I. Verallgemeinerung der Grundbegriffe 152
II. Die Funktionen von Winkelsummen und die Summen von Funktionen 159
III. Goniometrische Übungen 164
IV. Sätze über die Seiten und Winkel des Dreiecks 171
V. Dreiecksberechnungen 175
VI. Zusammenstellung der wichtigsten Formeln 180

Digitized by Google

Vierte Abteilung.

Stereometrie.

Seite

I. Begriff der Drehung und Entstehung von Drehungsgebilden . . 182
II. Ebenen und Gerade im Raume 184
III. Die körperlichen Ecken 191
IV. Die Fundamental-Konstruktionen und einige Anwendungen derselben 196
V. Anleitung zum korrekten stereometrischen Zeichnen 199
a) Die schräge Parallelprojektion 199
b) Die senkrechte Projektion 202
VI. Berechnungsübungen 204
a) Körperstumpfe 204
b) Kugelberechnungen 210
c) Übungsaufgaben 216
VII. Der Schwerpunkt, die Guldinschen Regeln und die Sätze über abgeschrägte Körper 218
VIII. Die Newton-Simpsonsche Regel und die Summenformel 224
IX. Kugelbetrachtungen mit kartographischen Anwendungen 230
X. Zusammenstellung der wichtigsten Berechnungsformeln der Stereometrie 234

Fünfte Abteilung.

Die Grundlehren von den Kegelschnitten.

I. Die Ellipse als Cylinderschnitt 236
II. Die Ellipse als Kegelschnitt 244
III. Die Parabel als Spezialfall der Ellipse 246
IV. Die Hyperbel als Kegelschnitt 251
V. Allgemeines über die Kegelschnitte 259

Anhang.

I. Eine Hauptaufgabe der mathematischen Geographie 265
II. Einige Bemerkungen über Maxima und Minima 266
III. Die Quadrateinteilung der Ebene mittels der Polarkoordinaten . 272

Digitized by Google

Digitized by Google

Druckfehler-Verzeichnis.

Seite 10, Zeile 2 lies in der Proportion ϱ_2 statt ϱ_1.
„ 13, „ 2 v. u. lies $2r\varrho_3$ statt $2e\varrho_3$.
„ 15, „ 7 v. u. lies $y = \frac{z_3 h_3}{h_2}$ statt $y = \frac{h_3}{h_2}$.
„ 41, „ 12 lies $\frac{AD}{BD}$ statt $\frac{AB}{BD}$.
„ 48, „ 13 lies $\sphericalangle CPD$ statt CBP.
„ 51, „ 20 lies P statt A.
„ 100, „ 12 v. u. lies $\left(1 + \frac{\%}{100}\right)^n$ statt $\left(1 + \frac{\%}{100}\right)$.
„ 106, „ 6 v. u. lies „der Kreis" statt „die Kugel".
„ 110, „ 4 lies im zweiten Bruche $(n - 1)$ statt $(n + 1)$.
„ 112, „ 10 v. u. lies $6a^2b^2$ statt $6a^2b$.
„ 128, „ 1 v. u. am Schluß lies $\frac{\beta^6}{n^3}$ statt $\frac{\beta^6}{n^6}$.
„ 141, „ 3 lies $x^2 + \frac{1}{x^2}$ statt $x^2 - \frac{1}{x^2}$.
„ 155, „ 4 v. u. lies „Zeichnung" statt „Rechnung".
„ 165, „ 3 v. u. lies überall sin statt cos.
„ 166, „ 7 v. u. links lies $\sin^2$ statt $\cos^2$.
„ 166, „ 2 v. u. im ersten Bruche lies $\sin\alpha$ statt $\sin\beta$.
„ 168, „ 9 lies $2\cos^2\frac{\alpha}{4}$ statt $2\cos^2\alpha$.
„ 169, „ 8 v. u. lies in der Klammer cos statt sin.
„ 172, „ 13 und 11 v. u. lies $-c^2$ statt $+c^2$.
„ 173, „ 7 lies $2\sin^2\frac{\gamma}{2}$ statt $\sin^2\frac{\gamma}{2}$.
„ 174, „ 11 v. u. lies $\sin^2\frac{\gamma}{2}$ statt $\sin\frac{\gamma}{2}$.
„ 177, „ 12 lies am Anfang -1 statt $+1$.
„ 235, „ 1 v. u. Die Nenner müssen der Reihe nach heißen: 1, 2, 3, 4.

viereck $ABCD_1$ mit der Seitenfolge $abdc$. Die Diagonale p bleibt,

*) Der Satz wird an erster Stelle durchgenommen, um gegebenenfalls bei einem Parallelkursus der Trigonometrie sofort Anwendung zu finden.

Digitized by Google

Digitized by Google

Erste Abteilung.

Geometrie

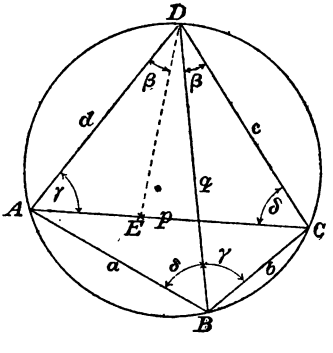
der Geraden und des Kreises.

I. Übungen am Sehnenviereck und am regelmäßigen Kreisvieleck.

1) **Satz des Ptolemäus.*)** Im Sehnenviereck ist das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte aus je zwei gegenüberliegenden Seiten.

Beweis. Die Seiten des Sehnenvierecks $ABCD$ in Fig. 1 seien a, b, c, d, die Diagonalen AC und BD sollen mit p und q bezeichnet werden. Legt man den Winkel $BDC = \beta$ als ADE an AD an, dann ist $\triangle BCD \sim AED$ (warum?), also $\frac{AE}{d} = \frac{b}{q}$ und $AE = \frac{bd}{q}$. Außerdem ist $\triangle DEC \sim DAB$ (warum?), folglich $\frac{EC}{c} = \frac{a}{q}$ und $EC = \frac{ac}{q}$. Folglich ist $AE + EC = p = \frac{ac+bd}{q}$ und $pq = ac + bd$.

Fig. 1.



2) **Folgerungen.** Setzt man das Dreieck ACD umgekehrt auf AC, so daß C und A ihre Stellen vertauschen, so entsteht ein Sehnenviereck $ABCD_1$ mit der Seitenfolge $abdc$. Die Diagonale p bleibt,

*) Der Satz wird an erster Stelle durchgenommen, um gegebenenfalls bei einem Parallelkursus der Trigonometrie sofort Anwendung zu finden.

Digitized by Google

an Stelle von q aber tritt eine neue Diagonale t, und jetzt gilt die Gleichung $pt = ad + bc$. Setzt man in diesem neuen Viereck das Dreieck BCD_1 umgekehrt auf BD_1, so entsteht ein Sehnenviereck ABC_1D_1 mit der Seitenfolge $adbc$ und den Diagonalen t und q, so daß $qt = ab + cd$ wird. Durch Division folgt aus den beiden letzten Gleichungen der Satz

$$\frac{p}{q} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

Auf das ursprüngliche Viereck übertragen lautet er in Worten: Im Sehnenviereck ist der Quotient der Diagonalen gleich dem Quotienten der Summen aus den Produkten je zweier aneinanderstoßenden Seiten. (Die Reihenfolge ist so zu nehmen, daß jeder Diagonale Seitenpaare entsprechen, die mit ihr in denselben Punkten zusammenstoßen.)

[Der Satz läßt sich auch mit Hülfe der Dreiecksformel*) $F = \frac{abc}{4r}$ beweisen. Nach dieser ist der Inhalt des Sehnenvierecks sowohl $F = \frac{adq}{4r} + \frac{bcq}{4r}$, als auch $F = \frac{abp}{4r} + \frac{cdp}{4r}$, so daß $p(ab + cd) = q(ad + bc)$ ist, was der obigen Gleichung entspricht.]

Durch Multiplikation und Division erhält man aus den Gleichungen für pq und $\frac{p}{q}$ Formeln zur Berechnung von p und q aus den Seiten, nämlich

$$p^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}, \quad q^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}.$$

Bemerkung. Man kann das Sehnenviereck auch in den Reihenfolgen $ABDC$ und $ACBD$ lesen. Macht man bei diesen gekreuzten Vierseiten dieselben geometrischen Betrachtungen, so findet man Formeln, die sich aus den vorigen ohne weiteres auf arithmetischem Wege ergeben, nämlich

$$bd = qp - ac, \quad ac = pq - bd,$$
$$\frac{b}{d} = \frac{qa - pc}{pa - qc'}, \quad \frac{a}{c} = \frac{qb - pd}{pb - qd}.$$

[Aus $p(ab + cd) = q(ad + bc)$ folgt z. B. $a(pb - qd) = c(qb - pd)$.]

3) **Aufgabe.** Den Inhalt eines Sehnenvierecks mit den Seiten a, b, c und d zu berechnen.

Auflösung. Man denke sich zwei Gegenseiten des Sehnenvierecks, z. B. a und c in Fig. 1, bis zu ihrem Schnittpunkte K verlängert.

*) Vergleiche unten Abschnitt 9.

Digitized by Google

Mit Hülfe der Gleichung $KB \cdot KA = KC \cdot KD$ läßt sich dann die Ähnlichkeit der Dreiecke KBC und KDA nachweisen. Die Flächen beider Dreiecke verhalten sich, wie die Quadrate von b und d, folglich ist $\triangle KBC = \triangle KDA \cdot \frac{b^2}{d^2}$, also ist Viereck $ABCD = \triangle KDA - \triangle KBC = \triangle KDA \left(1 - \frac{b^2}{d^2}\right) = \triangle KDA \frac{d^2 - b^2}{d^2}$. Setzt man $KA = x$ und $KD = y$, so ist

$$\triangle KDA = \tfrac{1}{4}\sqrt{(x+y+d)(-x+y+d)(x-y+d)(x+y-d)}.$$

Aus $b:d = (x-a):y$ folgt 1) $dx - by = ad$, aus $b:d = (y-c):x$ folgt 2) $dy - bx = cd$. Durch Addition folgt aus den Gleichungen 1) und 2) $d(x+y) - b(x+y) = ad + cd$ oder $(x+y)(d-b) = d(a+c)$, durch Subtraktion hingegen $d(x-y) + b(x-y) = ad - cd$ oder $(x-y)(d+b) = d(a-c)$. So ergiebt sich $x + y = \frac{d(a+c)}{d-b}$ und $x - y = \frac{d(a-c)}{d+b}$, also

$$x + y \pm d = \frac{d(a+c)}{d-b} \pm d = \frac{d}{d-b}(a + c \pm d \mp b)$$

und $$d \pm (x-y) = d \pm \frac{d(a-c)}{d+b} = \frac{d}{d+b}(d + b \pm a \mp c).$$

Einsetzung in die Gleichung für $\triangle KDA$ giebt

$$\triangle KDA$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{d}{d-b}(a+c+d-b)\frac{d}{d-b}(a+c-d+b)\frac{d}{d+b}(d+b+a-c)\frac{d}{d+b}(d+b-a+c)}$$

$$= \tfrac{1}{4}\frac{d^2}{d^2-b^2}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}.$$

Folglich ist Viereck $ABCD$

$$= \frac{d^2-b^2}{d^2}\cdot\tfrac{1}{4}\frac{d^2}{d^2-b^2}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}.$$

Setzt man $\frac{a+b+c+d}{2} = s$, so ist die vereinfachte Formel:

$$F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

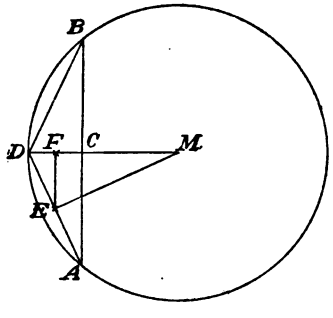
Bemerkungen. Ist eine der vier Seiten gleich Null, so handelt es sich um ein Dreieck, dem stets ein Kreis umbeschrieben werden kann. Die Formel geht dann in die Heronische Dreiecksformel über, die demnach als spezieller Fall in der obigen enthalten ist.

Digitized by Google

Der interessante Satz wird dem indischen Mathematiker Brahmagupta zugeschrieben, der 598 nach Chr. geboren wurde. Das 12. und 18. Kapitel seines Werkes Brâhma-sphuta-siddhânta, d. h. das verbesserte System des Brahma, sind der Mathematik gewidmet und enthalten unter anderem die Elemente der Goniometrie nebst Sinustabellen und Regeln für die Bildung rechtwinkliger Dreiecke mit rationalen Seiten.

4) **Aufgabe.** Aus dem Radius r eines Kreises und dem Halbmesser ϱ eines einbeschriebenen regelmäßigen Vielecks den Radius ϱ' des einbeschriebenen Vielecks von doppelter Seitenzahl zu berechnen.

Fig. 2.



Auflösung. In Fig. 2 sei AB die Seite des dem Kreise mit Radius r einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks, $MC = \varrho$ der Radius des dem letzteren einbeschriebenen Kreises, also D der Halbierungspunkt des Bogens AB, AD die Seite des $2n$-Ecks und $ME = \varrho'$ der Radius des ihm einbeschriebenen Kreises. Zieht man $EF \parallel AB$, so ist F der Halbierungspunkt von CD, also $MF = \frac{r+\varrho}{2}$. Nach Pythagoras ist aber $ME^2 = MF \cdot MD$, also $\varrho'^2 = \frac{r+\varrho}{2} \cdot r$, folglich $\varrho' = \sqrt{\frac{r(r+\varrho)}{2}}$.

Bemerkung. Ist u der Umfang des einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks, so ist der des umbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks das $\frac{r}{\varrho}$fache. Berechnet man nun, vom Quadrat oder Sechseck oder Zehneck ausgehend, die ϱ für das entsprechende $2n$-Eck, $4n$-Eck, $8n$-Eck u. s. w., so erhält man die angenäherte Berechnung von π auf bequemere Art, als nach der im ersten Teile benutzten Methode. (Vergl. Nr. 148.)

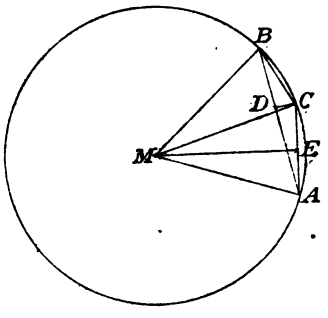
5) **Aufgabe.** Die Seite des dem Kreise mit Radius r einbeschriebenen Fünfzehnecks zu berechnen.

Auflösung. In Fig. 3 sei $AB = r$ die Seite des regelmäßigen 6-Ecks, $AC = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$ die des regelmäßigen 10-Ecks, also BC die des regelmäßigen 15-Ecks, außerdem sei $ME \perp AC$

Digitized by Google

und $CD \perp AB$.* Dann ist $\triangle BCD \sim MCE$ (denn $\sphericalangle ABC = \frac{1}{2} \sphericalangle AMC$), folglich $BD : BC = \sqrt{r^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} : r$, also, wenn $BC = x$ gesetzt wird, $BD = \frac{x}{r}\sqrt{r^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2}$. Zugleich ist im Dreieck ABC nach dem Pythagoreischen Lehrsatz für den spitzen Winkel $AC^2 = x^2 + r^2 - 2r \cdot BD$, also nach Einsetzung des Wertes von BD

Fig. 3.



$AC^2 = x^2 + r^2 - 2x\sqrt{r^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2}$, oder $x^2 - 2x\sqrt{r^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = AC^2 - r^2$. Daraus folgt als Lösung

$$x = \sqrt{r^2 - \frac{AC^2}{4}} \pm \sqrt{r^2 - \frac{AC^2}{4} + AC^2 - r^2} = \sqrt{r^2 - \frac{AC^2}{4}} \pm \frac{AC}{2}\sqrt{3}.$$

Einsetzung des Wertes von AC giebt

$$x = r\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \pm \frac{r}{4}(\sqrt{5}-1)\sqrt{3} = \frac{r}{4}\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}} \pm (\sqrt{15}-\sqrt{3})\right].$$

Nur das negative Zeichen ist brauchbar, es giebt $x_1 = 0{,}4158236\,r$ als Seite des nach einem Umgange schließenden 15-Ecks. Das positive Zeichen giebt $x_2 = 1{,}48629\,r$, was offenbar zu groß ist und wozu, wie sich (z. B. goniometrisch) zeigen läßt, der Centriwinkel $96^0 = 60^0 + 36^0$ gehört, so daß jetzt das 15-Eck erst nach viermaligem Umgange schließt.]

Bemerkung. Die Resultate dieses Abschnitts können benutzt werden, die goniometrischen Funktionen der Winkel 12^0, 78^0, 24^0, 56^0, 48^0, 42^0 u. s. w. zu berechnen. — Auf die Möglichkeit, Umfang und Inhalt des regelmäßigen 15-Ecks aus r oder der Seite b zu berechnen und auch die übrig bleibenden Segmentflächen des Kreises zu ermitteln, sei nur kurz hingewiesen.

6) **Aufgabe.** Über einer gegebenen Geraden ein regelmäßiges 5-, 6-, 8-, 10-, 12-, 15-Eck u. s. w. zu konstruieren.

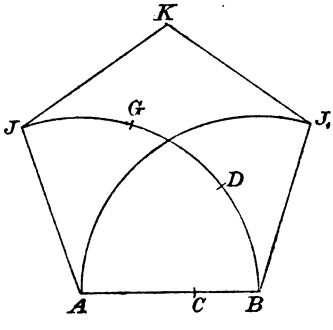
Auflösung. Man konstruiere die n-Eckseite zunächst für einen beliebigen Kreis nach den früher gelehrten Methoden und zeichne den zugehörigen Centriwinkel. Das erhaltene gleichschenklige Dreieck vergrößere man jetzt so, daß seine Basis gleich der gegebenen Geraden wird. Diese läßt sich dann in dem koncentrischen durch die Endpunkte der letzteren gehenden Kreise $n$mal abtragen.

Digitized by Google

Bemerkungen. In einzelnen Spezialfällen lassen sich kürzere Wege einschlagen. Das regelmäßige Sechseck läßt sich ohne weiteres mit Hülfe des über der Geraden stehenden gleichseitigen Dreiecks zeichnen. Um das regelmäßige Achteck zu erhalten, kann man an die beiden Verlängerungen der Geraden den Winkel 45^0 anlegen. Die Halbierungslinien der beiden Nebenwinkel schneiden sich dann im Mittelpunkte des gesuchten Achtecks.

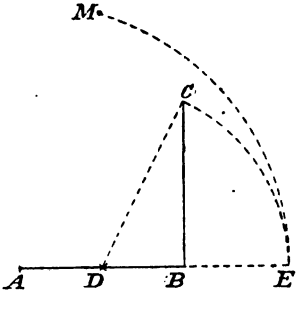
Zur Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks teile man AB nach dem goldnen Schnitt in C, schlage um A mit AB einen Kreis, mache $BD = AC$ (Seite des regelmäßigen Zehnecks) und trage den Bogen BD noch zweimal als DG und GJ auf dem um A geschlagenen Kreise ab, so daß $\sphericalangle BAJ = 3 \cdot 36^0 = 108^0$ wird, wie es das Fünfeck verlangt. Um B schlage man einen Kreisbogen mit BA, um A einen solchen mit BJ, als Schnitt J_1 erhält man dann einen neuen Fünfeckspunkt. Um J und J_1 sind Bogen mit BA zu schlagen, die den letzten Punkt K geben.

Fig. 4.



Versuche folgende Zehnecks-Konstruktion als richtig nachzuweisen: Ist AB die gegebene Seite, so mache Lot $BC = AB$, halbiere AB in D, schlage mit DC um D einen Kreisbogen, der auf der Verlängerung von AB den Schnitt E giebt. Um A und B schlage Bogen mit AE, die den Schnitt M geben. M ist Mittelpunkt des gesuchten Zehnecks, welches mit Hülfe des Um-Kreises leicht vollendet wird.

Fig. 5.



Der Italiener Mascheroni (sprich Maskeroni) hat die Fundamentalkonstruktionen der Planimetrie mit dem Zirkel allein, also ohne Hülfe des Lineals, durchgeführt.

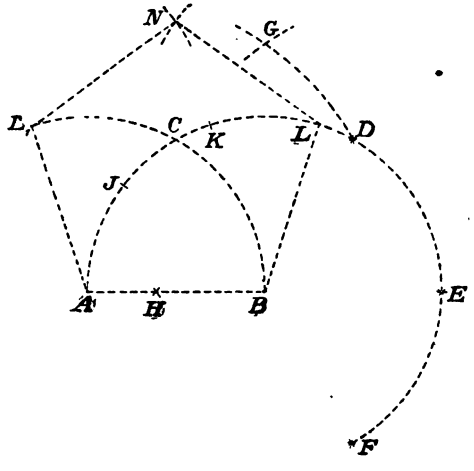
Die Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks aus zwei Eckpunkten A und B giebt er dabei folgendermaßen:

Schlage um B mit AB einen Kreis (Fig. 6), trage den Radius von A aus 4mal ab, was C, D, E und F giebt. Mit AD schlage Bogen um A und E, die den Schnitt G geben, mit BG

Digitized by Google

Bogen um D und F, die den Schnitt H geben. Trage von A aus auf dem Kreise 3mal BH ab, was J, K und L giebt, dann ist L ein Punkt des Fünfecks. Bogen um A und B mit AB bezw. AL geben L_1, Bogen um L und L_1 mit AB geben N. Die Punkte $ABLNL_1$ sind die Ecken des gesuchten Fünfecks.

Fig. 6.



Das Zehneck konstruiert man nach ihm folgendermaßen. Wiederhole die vorige Konstruktion bis H und schlage um A und B Bogen mit EH, die den Schnitt M geben. Der Kreis um M mit Radius MA ist der Um-Kreis des leicht zu vollendenden Zehnecks.

Versuche beide Konstruktionen als richtig nachzuweisen.

Der große Geometer Steiner hat versucht, die Konstruktionen mit dem Lineal allein auszuführen, also ohne den Zirkel. Bei zahlreichen Konstruktionen ergab sich die Möglichkeit dieser Ausführung nur unter der Bedingung, daß in der Ebene ein fester Kreis gegeben war. Einiges davon kommt später zur Sprache.

II. Übungen an den Dreieckskreisen.

a) Die Radien der vier Berührungskreise des Dreiecks.

7) Im ersten Teile (Nr. 119, 181, 182) ist Folgendes gezeigt worden: Setzt man bei einem Dreiecke mit den Seiten a, b und c

1.
$$p = \frac{a+b+c}{2}, \quad p_1 = \frac{-a+b+c}{2},$$
$$p_2 = \frac{a-b+c}{2}, \quad p_3 = \frac{a+b-c}{2},$$

so bedeuten p_1, p_2 und p_3 die Längen der Tangenten, die von den Eckpunkten aus an die benachbarten Berührungskreise gelegt sind.

Digitized by Google

Zugleich ist $p_1 + p_2 + p_3 = p$; die Radien der Berührungskreise berechnen sich aus

2. $\varrho = \sqrt{\frac{p_1 p_2 p_3}{p}}$, $\varrho_1 = \sqrt{\frac{p p_2 p_3}{p_1}}$, $\varrho_2 = \sqrt{\frac{p p_1 p_3}{p_2}}$, $\varrho_3 = \sqrt{\frac{p p_1 p_2}{p_3}}$;

dagegen ist der Inhalt des Dreiecks

3. $F = p\varrho = p_1\varrho_1 = p_2\varrho_2 = p_3\varrho_3 = \sqrt{p p_1 p_2 p_3}$.

Aufgabe. Leite daraus durch Rechnung folgende Beziehungen ab:

4. $\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} = \frac{1}{\varrho}$.

(Setze für ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 die obigen Werte ein, mache die Brüche gleichnamig und forme ihre Summe so um, daß der Ausdruck $\frac{1}{\varrho}$ entsteht.)

5. $\varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3 = p p_1 p_2 p_3$, also auch $F = \sqrt{\varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3}$.

6. $\varrho\varrho_3 + \varrho_1\varrho_2 = p_1 p_2 + p p_3 = ab$, $\varrho\varrho_1 + \varrho_2\varrho_3 = p_2 p_3 + p p_1 = bc$,
$\varrho\varrho_2 + \varrho_3\varrho_1 = p_3 p_1 + p p_2 = ca$.*)

(Die Formel ist leicht als Rechtecksatz in Worten auszudrücken. Zu ihrer Ableitung zeige, daß $\varrho\varrho_3 = p_1 p_2 = \frac{c - (a-b)}{2} \cdot \frac{c + (a-b)}{2}$ $= \frac{c^2 - (a-b)^2}{4}$ ist, bilde ebenso $\varrho_1\varrho_2 = p p_3 = \frac{(a+b)^2 - c^2}{4}$, und bilde die Summe, die ab giebt.)

7. $\frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1} = \frac{2}{h_1}$, $\frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_2} = \frac{2}{h_2}$,
$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_3} = \frac{2}{h_3}$.

(Denn es ist z. B. nach Obigem

$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{p_1}{F} + \frac{p_2}{F} = \frac{p_1 + p_2}{F} = \frac{c}{F} = \frac{2c}{ch_3} = \frac{2}{h_3}$ u. s. w.)

Die Formel läßt sich auch folgendermaßen schreiben:

7.* $h_1 = \frac{2\varrho\varrho_1}{\varrho_1 - \varrho} = \frac{2\varrho_2\varrho_3}{\varrho_2 + \varrho_3}$, $h_2 = \frac{2\varrho\varrho_2}{\varrho_2 - \varrho} = \frac{2\varrho_3\varrho_1}{\varrho_3 + \varrho_1}$,
$h_3 = \frac{2\varrho\varrho_3}{\varrho_3 - \varrho} = \frac{2\varrho_1\varrho_2}{\varrho_1 + \varrho_2}$.

*) Achte auf die cyklische Vertauschung der Indices 1, 2 und 3. Die zweite Formel folgt so aus der ersten, daß 2 statt 1, 3 statt 2, 1 statt 3 geschrieben wird. Ebenso folgt die dritte aus der zweiten. Man erspart dadurch alle Rechnungswiederholungen.

Digitized by Google

8. $a = F\left(\frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3}\right) = F\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1}\right)$, $b = F\left(\frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_1}\right) = F\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_2}\right)$,

$$c = F\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) = F\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_3}\right).$$

(In der vorigen Beweisführung kam die Gleichung $\frac{p_1 + p_2}{F} = \frac{c}{F}$, also ist $\frac{c}{F} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}$ u. s. w.) Setzt man in 8. für F seinen Wert $\sqrt{\varrho\,\varrho_1\,\varrho_2\,\varrho_3}$ ein, so wird $a = \sqrt{\varrho\,\varrho_1\,\varrho_2\,\varrho_3}\,\frac{\varrho_2 + \varrho_3}{\varrho_2\,\varrho_3} = (\varrho_2 + \varrho_3)\sqrt{\frac{\varrho\,\varrho_1}{\varrho_2\,\varrho_3}}$. Ebenso folgt $a = (\varrho_1 - \varrho)\sqrt{\frac{\varrho_2\,\varrho_3}{\varrho\,\varrho_1}}$. Aus beiden Gleichungen erhält man durch Multiplikation eine einfachere. Das neue System von Gleichungen ist:

9. $a^2 = (\varrho_1 - \varrho)(\varrho_2 + \varrho_3)$, $b^2 = (\varrho_2 - \varrho)(\varrho_3 + \varrho_1)$,

$$c^2 = (\varrho_3 - \varrho)(\varrho_1 + \varrho_2).$$

Das Quadrat über jeder Dreiecksseite ist also gleich dem Rechteck aus der Differenz und der Summe je zweier der Radien, die Dreiecksseite selbst ist die mittlere Proportionale zur genannten Summe und Differenz.

Solcher Beziehungen lassen sich noch beliebig viele aufstellen, die zum Teil von weiter gehendem Interesse sind. So kann man z. B. in der Gruppe 2. die p und ϱ einfach vertauschen, also $p = \sqrt{\frac{\varrho_1\,\varrho_2\,\varrho_3}{\varrho}}$ u. s. w.

8) Konstruktive Bemerkungen.

α) Aus Formel 4. erkennt man, daß jeder der vier Radien bestimmt ist, wenn die drei anderen gegeben sind. Um z. B. ϱ aus den übrigen Radien zu konstruieren, kann man mehrere Wege einschlagen.

Aus 4. folgt $\varrho = \frac{\varrho_1(\varrho_2\,\varrho_3)}{(\varrho_1\,\varrho_2) + (\varrho_2\,\varrho_3) + (\varrho_3\,\varrho_1)}$, wo die Klammern Rechtecke sind, die man in Quadrate verwandeln kann. Die des Nenners lassen sich nach Pythagoras addieren, so daß man hat $\varrho = \frac{\varrho_1 m^2}{n^2} = \left(\frac{\varrho_1 m}{n}\right)\frac{m}{n} = \frac{x\,m}{n}$. Hier bestimmt sich x aus der Proportion $n : m = \varrho_1 : x$, darauf ϱ aus der Proportion $n : x = m : \varrho$ als vierte Proportionale.

Einfacher und übersichtlicher ist folgender Weg: Man nehme, wenn ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 gegeben sind, eine beliebige Länge als Einheit an, am bequemsten einen der Radien, z. B. $\varrho_3 = 1$, so daß auch $\frac{1}{\varrho_3} = 1$

Digitized by Google

ist. Dann findet man $x = \frac{1}{\varrho_1}$ mit Hülfe der Proportion $\varrho_1 : 1 = 1 : x$, $y = \frac{1}{\varrho_2}$ aus $\varrho_1 : 1 = 1 : y$. Jetzt ist $\frac{1}{\varrho}$ durch die Summe $\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3}$ bestimmt, und ϱ ergiebt sich aus $\varrho : 1 = 1 : \frac{1}{\varrho}$. Durch die dem letzteren entsprechende Konstruktion ist der Einfluß der willkürlich gewählten Einheit wieder aufgehoben.

Man kann jetzt annehmen, daß, wenn drei der Radien gegeben sind, der vierte mit gegeben ist.

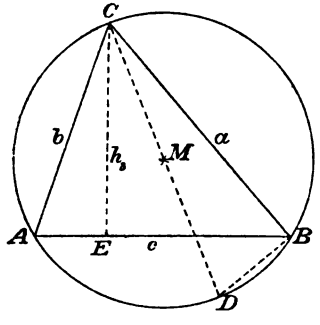
β) Aus 9. ergiebt sich, wie man das Dreieck konstruiert, wenn drei der Radien gegeben sind. Man hat nach der Konstruktion des vierten nur drei mittlere Proportionalen zu gewissen Summen und Differenzen zu konstruieren, um die Seiten zu erhalten.

γ) Demnach lassen sich z. B. Dreiecke konstruieren aus $\varrho, \varrho_1, \varrho_2$; $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$; ϱ, ϱ_1, F; ϱ_1, ϱ_2, F; a, ϱ, ϱ_1; a, ϱ, ϱ_2; a, ϱ_1, ϱ_2; a, ϱ_2, ϱ_3; h_1, ϱ, ϱ_2; h_1, ϱ, ϱ_3; $h_1, \varrho_1, \varrho_2$; $h_1, \varrho_1, \varrho_3$.

δ) Dagegen läßt sich kein Dreieck konstruieren aus h_1, ϱ, ϱ_1; $h_1, \varrho_2, \varrho_3$; h_2, ϱ, ϱ_2; $h_2, \varrho_3, \varrho_1$; h_3, ϱ, ϱ_3; $h_3, \varrho_1, \varrho_2$; denn diese Größen sind nicht unabhängig von einander, sondern durch die Gleichungen 7. mit einander verbunden. Ist z. B. ϱ und ϱ_1 gegeben, so darf h_1 nicht gegeben werden, sondern man hat es aus $h_1 = \frac{2\varrho\varrho_1}{\varrho_1 - \varrho}$ zu berechnen, oder mittels $(\varrho_1 - \varrho) : 2\varrho = \varrho_1 : h_1$ als vierte Proportionale zu konstruieren.

b) Der Radius des Um-Kreises und seine Beziehungen zu den Seiten und Berührungskreisen des Dreiecks.

Fig. 7.



9) **Aufgabe.** Den Radius r aus den Seiten a, b und c zu berechnen.

Auflösung. In Fig. 7 sei CD ein Durchmesser $2r$ und CE die Höhe h_3. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AEC und DBC folgt $a : 2r = h_3 : b$, also ist

$$r = \frac{ab}{2h_3} = \frac{abc}{2h_3 c} = \frac{abc}{4F}.$$

Daraus ergiebt sich

10. $$r = \frac{abc}{4F} = \frac{abc}{4\sqrt{p p_1 p_2 p_3}} = \frac{abc}{4\sqrt{\varrho \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3}} = \frac{abc}{4p\varrho} = \frac{abc}{4p_1\varrho_1}$$ u. s. w.

Digitized by Google

10) **Aufgabe.** Den Radius r aus den Radien der Berührungskreise zu berechnen.

Auflösung.

Oben war unter 7. $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_3} = \frac{2}{h_3}$, folglich $\varrho_3 - \varrho = \frac{2\varrho\varrho_3}{h_3} = \frac{2p_1p_2}{h_3}$;

" " " $\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{2}{h_3}$, " $\varrho_1 + \varrho_2 = \frac{2\varrho_1\varrho_2}{h_3} = \frac{2pp_3}{h_3}$.

Durch Addition folgt aus den Gleichungen (mit Hülfe des Systems 6)

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho = \frac{2}{h_3}(p_1p_2 + pp_3) = \frac{2ab}{h_3} = \frac{2abc}{h_3 c} = \frac{abc}{F} = 4r.$$

$$11. \quad \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho = 4r.$$

(Faßt man den Radius ϱ als negative Größe auf, so ist r das arithmetische Mittel aus den vier anderen Radien.) Sind von den 5 Radien 3 bekannt, so lassen sich die beiden anderen konstruieren und berechnen. In jeder der früheren Aufgaben läßt sich demnach eins der ϱ durch r ersetzen. Aus 11. und 9. ergeben sich z. B. Formeln, die mit den Formeln 7. zusammen zur Konstruktion des Dreiecks aus r und den Radien zweier Berührungskreise dienen:

$$12. \quad \begin{cases} a^2 = (\varrho_1 - \varrho)(4r + \varrho - \varrho_1) = (\varrho_2 + \varrho_3)(4r - \varrho_2 - \varrho_3) \\ b^2 = (\varrho_2 - \varrho)(4r + \varrho - \varrho_2) = (\varrho_3 + \varrho_1)(4r - \varrho_3 - \varrho_1) \\ c^2 = (\varrho_3 - \varrho)(4r + \varrho - \varrho_3) = (\varrho_1 + \varrho_2)(4r - \varrho_1 - \varrho_2). \end{cases}$$

Einige der Konstruktionen vereinfachen sich noch durch den folgenden Satz:

11) **Satz.** Die beiden durch zwei Ecken eines Dreiecks gehenden Kreise, die ihre Mittelpunkte auf dem Um-Kreise haben, gehen durch je zwei Mittelpunkte von Berührungskreisen des Dreiecks.

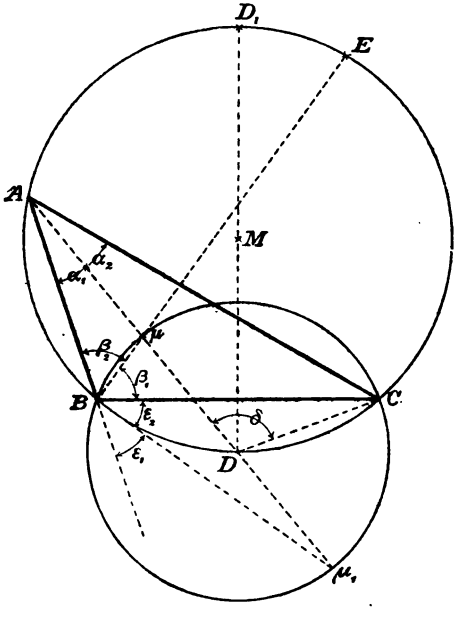
Beweis. In Fig. 8 sei ABC das Dreieck mit seinem Um-Kreise M und dem Kreise D durch B und C, wobei D auf dem Um-Kreise liegt. Aus $BD = DC$ folgt $\sphericalangle \alpha_1 = \sphericalangle \alpha_2$. Im Kreise D ist $\sphericalangle \delta = 2\beta_1$ (Centri- und Peripheriewinkel auf demselben Bogen μC), im Kreise M ist $\delta = \beta_1 + \beta_2$ (Peripheriewinkel auf demselben Bogen AC). Folglich $\beta_1 + \beta_2 = 2\beta_1$, also $\beta_1 = \beta_2$. Da aber durch $A\mu$ und $B\mu$ die Winkel bei A und B halbiert sind, so ist μ der Mittelpunkt des In-Kreises.

Aus $\sphericalangle \mu B\mu_1 = 90^0$ folgt, daß auch der Außenwinkel bei B halbiert, μ_1 also Mittelpunkt des Berührungskreises mit Radius ϱ_1 ist.

Digitized by Google

Entsprechend wird der Beweis für den Kreis geführt, der um den Gegenpunkt D_1 durch B und C geschlagen wird, nur treten dabei mehrfach Supplementwinkel statt gleicher Winkel auf. Der neue Kreis wird durch AD_1 in μ_2 und μ_3 geschnitten, wobei die Gerade $\mu_2\mu_3$ als Durchmesser in D_1 halbiert ist.

Fig. 8.



[Ist E der Halbierungspunkt des Bogens AC, so geht der um E durch A und C geschlagene Kreis durch μ und μ_2, so daß der Durchmesser $\mu\mu_2$ (die Verlängerung von $B\mu$) in E halbiert ist.

Das Dreieck ABC ist dann das Höhenfußpunktdreieck von $\mu_1\mu_2\mu_3$ (zugleich auch von $\mu\mu_1\mu_2$, $\mu\mu_1\mu_3$ und $\mu\mu_2\mu_3$), und die fertige Zeichnung giebt den Satz: Der Kreis durch die Höhenfußpunkte eines Dreiecks halbiert die Dreiecksseiten und die oberen Abschnitte der Höhen. Er wird der Kreis der neun Punkte oder nach seinem Entdecker der Feuerbachsche Kreis genannt.]

Alle Peripheriewinkel über BC im Kreise M geben Dreiecke, bei denen die Mittelpunkte der Berührungskreise auf den Kreisen D und D_1 liegen; dasselbe gilt auch von den Peripheriewinkeln unter BC. Wandert also A von B über D_1 nach C, so wandert μ auf derselben Seite der Geraden BC auf dem Kreise D von B nach C; wandert A von C über D nach B, so wandert μ auf derselben Seite der Geraden BC auf dem Kreise D_1 von C nach B.

12) **Aufgabe.** Ein Dreieck aus r, a und ϱ zu konstruieren.

Auflösung. a) Trage in den mit Radius r geschlagenen Kreis die Sehne a als BC ein, halbiere den kleineren Bogen BC in D, schlage um D durch B (und C) den jenseits BC liegenden Kreisbogen BC, ziehe dort eine Parallele zu BC im Abstande ϱ. Schneidet diese den Bogen

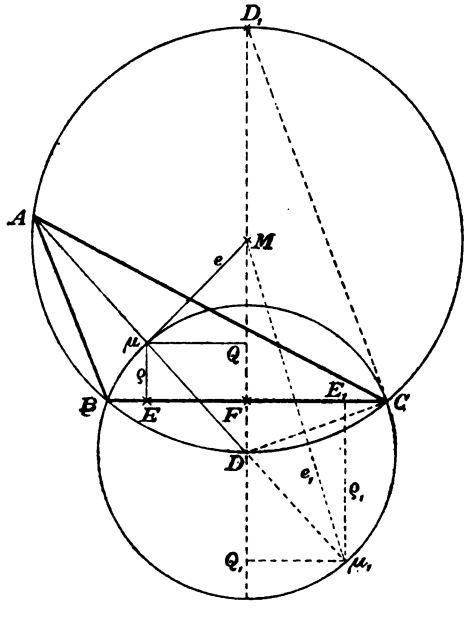
Digitized by Google

des Kreises D in μ, so giebt $D\mu$ verlängert den Schnittpunkt A auf dem gegebenen Kreise, und ABC ist das gesuchte Dreieck. (Vgl. Fig. 8.)

b) Statt den kleineren Bogen in D zu halbieren, kann man auch den größeren Bogen in D_1 halbieren und die Konstruktion auf der andern Seite der Geraden BC durchführen. Der Winkel bei A wird jetzt das Supplement des vorigen.

Bemerkung. Ebenso geschieht die Konstruktion eines Dreiecks aus r, a und ϱ_1, nur wird dabei jedesmal auf zwei verschiedenen Seiten von BC gearbeitet.

Fig. 9.



13) **Aufgabe.** Wie weit ist der Mittelpunkt des Um-Kreises von denen der Berührungskreise entfernt?

Auflösung. In Figur 9 ist

$$e^2 = \overline{M\mu}^2 = \overline{MQ}^2 + \overline{\mu Q}^2 = (MD - QD)^2 + (\mu D^2 - QD^2)$$
$$= MD^2 - 2MD \cdot QD + \mu D^2 = MD^2 - 2MD \cdot QD + DC^2$$
$$= MD^2 - 2MD \cdot QD + DF \cdot DD_1,$$

oder

$$e^2 = r^2 - 2r \cdot QD + 2r \cdot DF = r^2 - 2r\,(QD - DF)$$
$$= r^2 - 2r \cdot QF = r^2 - 2r \cdot \mu E, \quad \text{d. h. } e^2 = r^2 - 2r\varrho.$$

Bemerkung. Setzt man $M\mu_1 = e_1$, so beweist man ebenso, daß $e_1^2 = r^2 + 2r\varrho_1$ ist.

Im Ganzen bestehen also für die Entfernungen von M nach μ, μ_1, μ_2 und μ_3 folgende Beziehungen:

$$13^a. \quad e^2 = r^2 - 2r\varrho, \quad e_1^2 = r^2 + 2r\varrho_1, \quad e_2^2 = r^2 + 2r\varrho_2,$$
$$e_3^2 = r^2 + 2e\varrho_3;$$

oder

Digitized by Google

13^b. $e = \sqrt{r(r-2\varrho)}$, $e_1 = \sqrt{r(r+2\varrho_1)}$, $e_2 = \sqrt{r(r+2\varrho_2)}$,
$e_3 = \sqrt{r(r+2\varrho_3)}$,

oder

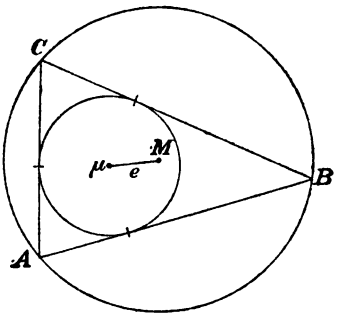
13^c. $e^2 = (r-\varrho)^2 - \varrho^2$, $e_1^2 = (r+\varrho_1)^2 - \varrho_1^2$,
$e_2^2 = (r+\varrho_2)^2 - \varrho_2^2$, $e_3^2 = (r+\varrho_3)^2 - \varrho_3^2$.

Nach den Formeln 13^b. werden die gesuchten Entfernungen als mittlere Proportionalen zwischen den beiden Faktoren unter den Wurzeln konstruiert, nach den Formeln 13^c. geschieht die Konstruktion nach Pythagoras. Die Dreieckskonstruktionen geschehen von jetzt ab so, daß man um die Endpunkte der so gefundenen Geraden e bezw. e_1, e_2, e_3 Kreise mit den betreffenden Radien schlägt.

Damit sind folgende Konstruktionen ermöglicht: Ein Dreieck zu konstruieren aus: r, ϱ, a; r, ϱ_1, a; r, ϱ_2, a; r, ϱ, α; r, ϱ_1, α; r, ϱ_2, α; a, α, ϱ; a, α, ϱ_1; a, α, ϱ_2; auch können rechtwinklige und gleichschenklige Dreiecke mit je zwei solchen Radien verlangt werden. (Die Tangente von M aus führt auf den rechten Winkel; die Linie $M\mu$ auf das symmetrische Dreieck.)

14) **Bemerkung.** Ist $e = \sqrt{r(r-2\varrho)}$ konstruiert, und hat man um die Endpunkte von e Kreise mit r und ϱ geschlagen, so sind unendlich viele Dreiecke möglich, denn das dritte Stück ist noch nicht gegeben.

Fig. 10.



Legt man also von einem beliebigen Punkte A des Kreises M an den Kreis μ eine Tangente, die bis zum Schnittpunkte B mit dem Kreise M zu verlängern ist, zieht man ebenso von B aus eine zweite Tangente BC und ebenso von C aus eine dritte Tangente, so trifft diese nach A. Mit anderen Worten: Führt die Konstruktion von drei solchen Tangenten nach dem Ausgangspunkte A in einem Falle zurück, so schließt die Reihe der Tangenten stets, wo man auch beginne*). Daraus ergeben sich neue Konstruktionen

*) Dies ist eins der berühmten Steinerschen Schließungsprobleme, welches durch Projektion auf Kegelschnitte übertragen werden kann. Für höhere Teile der Mathematik ist es sehr wichtig geworden.

Digitized by Google

für das Dreieck aus r, ϱ, α; r, ϱ, a u. s. w. Die entsprechenden Bemerkungen für r und ϱ_1 bieten keine Schwierigkeit.

15) **Bemerkung.** Die Pfeilhöhe $FD = d_1$ des Bogens BC in Fig. 9 ist, da $\mu\mu_1$ in D halbiert ist, $d_1 = \frac{\varrho_1 - \varrho}{2}$. Man hat also die Gleichungen

$$d_1 = \frac{\varrho_1 - \varrho}{2} = \frac{4r - (\varrho_2 + \varrho_3)}{2}, \quad d_2 = \frac{\varrho_2 - \varrho}{2} = \frac{4r - (\varrho_3 + \varrho_1)}{2},$$

$$d_3 = \frac{\varrho_3 - \varrho}{2} = \frac{4r - (\varrho_1 + \varrho_2)}{2}.$$

Soll demnach ein Dreieck aus r, ϱ und ϱ_1 konstruiert werden, so bilde man $d_1 = \frac{\varrho_1 - \varrho}{2}$ und lege in den Kreis mit Radius r die entsprechende Sehne a. In der Entfernung $h_1 = \frac{2\varrho\varrho_1}{\varrho_1 - \varrho}$ ziehe man jenseits d_1 eine Parallele zu a, die den gesuchten Punkt C bestimmt. Damit ist gezeigt, wie man aus r und den Radien zweier beliebigen Berührungskreise das Dreieck konstruieren kann.

III. Beziehungen zwischen den Seiten, Höhen, Mittellinien und Winkelhalbierenden des Dreiecks.*)

16) **Aufgabe.** Die Seiten x, y, z eines Dreiecks aus den Höhen h_1, h_2, h_3 zu berechnen.

Auflösung. Aus $F = \frac{xh_1}{2} = \frac{yh_2}{2}$ folgt $y = \frac{xh_1}{h_2}$, ebenso ist $z = \frac{xh_1}{h_3}$. (Die dritte Gleichung $y = \frac{h_3}{h_2}$ würde nichts neues geben.) Man setze die Werte von y und z in die Gleichung

$$F = \frac{xh_1}{2} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}$$

ein, wobei z. B. $x + y + z = x + \frac{xh_1}{h_2} + \frac{xh_1}{h_3} = x\frac{h_1h_2 + h_2h_3 + h_3h_1}{h_2h_3}$ wird. Diese geht dann über in

$$\frac{xh_1}{2} =$$

$$\frac{x^2}{4h_2{}^2h_3{}^2}\sqrt{(h_1h_2+h_2h_3+h_3h_1)(-h_1h_2+h_2h_3+h_3h_1)(h_1h_2-h_2h_3+h_3h_1)(h_1h_2+h_2h_3-h_3h_1)}.$$

*) Dieser Abschnitt hat nur Bedeutung für gelegentliche Übungen im Berechnen.

Digitized by Google

Nach beiderseitiger Division durch x folgt, wenn man a, b, c für x, y, z setzt:

$$a = \frac{2h_1h_2^2h_3^2}{N}, \quad b = \frac{2h_2h_3^2h_1^2}{N}, \quad c = \frac{2h_3h_1^2h_2^2}{N},$$

wo

$$N = \sqrt{(h_1h_2+h_2h_3+h_3h_1)(-h_1h_2+h_2h_3+h_3h_1)(h_1h_2-h_2h_3+h_3h_1)(h_1h_2+h_2h_3-h_3h_1)}.$$

17) **Aufgabe.** Die Seiten eines Dreiecks aus den Höhen h_1, h_2 und h_3 zu konstruieren.

Auflösung. Aus $\frac{xh_1}{2} = \frac{yh_2}{2}$ folgt $x : y = h_2 : h_1$ und $x : z = h_3 : h_1$. Demnach ist das Verhältnis der Dreiecksseiten bekannt $\left(x : y : z = h_2 : h_1 : \frac{h_1h_2}{h_3}\right)$. Man konstruiere ein Dreieck mit beliebiger Seite x' und den Seiten y' und z', die dieser Proportion entsprechen. Ist dann h_1' die Höhe dieses Dreiecks auf x', so ist $x = x'\frac{h_1}{h_1'}$ als Seite des gesuchten Dreiecks leicht zu konstruieren.

Diese Konstruktion ist weit bequemer, als die mit Hülfe der oben berechneten Ausdrücke durchzuführende.

Bemerkung. Die umgekehrte Aufgabe, die Höhen aus den Seiten zu berechnen, ist schon in Theil I. gelöst worden. Sie führte auf

$$h_1 = \frac{2F}{a} = \frac{2}{a}\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)},$$

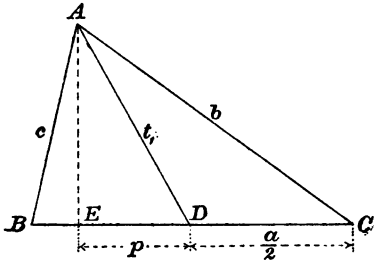
so daß man hat:

$$h_1 = \frac{W}{2a}, \quad h_2 = \frac{W}{2b}, \quad h_3 = \frac{W}{2c},$$

wo $W = \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$.

18. **Aufgabe.** Die Mittellinien t_1, t_2, t_3 eines Dreiecks aus den Seiten a, b, c zu berechnen.

Fig. 11.



Auflösung. In Fig. 11 ist nach dem Pythagoreischen Lehrsatze für das allgemeine Dreieck

$$b^2 = \frac{a^2}{4} + t_1^2 + 2\frac{a}{2}p$$

und

$$c^2 = \frac{a^2}{4} + t_1^2 - 2\frac{a}{2}p,$$

also durch Addition

Digitized by Google

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2t_1^2,$$

so daß man hat

$$t_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}, \quad t_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2},$$
$$t_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

19) **Aufgabe.** Die Seiten x, y und z eines Dreiecks aus den Mittellinien t_1, t_2, t_3 zu berechnen.

Auflösung. Aus den letzten Formeln folgt

a) $2y^2 + 2z^2 - x^2 = 4t_1^2$, b) $2z^2 + 2x^2 - y^2 = 4t_2^2$,

c) $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 4t_3^2$.

Durch Subtraktion erhält man daraus

$$x^2 - z^2 = \tfrac{4}{3}(t_3^2 - t_1^2), \quad y^2 - x^2 = \tfrac{4}{3}(t_1^2 - t_2^2).$$

Berechnet man z^2 aus der ersten und y^2 aus der zweiten Gleichung, und setzt man ihre Werte in c) ein, so folgt, wenn man a, b, c statt x, y, z setzt:

d) $a = \tfrac{2}{3}\sqrt{2t_2^2 + 2t_3^2 - t_1^2}$, $b = \tfrac{2}{3}\sqrt{2t_3^2 + 2t_1^2 - t_2^2}$,

$$c = \tfrac{2}{3}\sqrt{2t_1^2 + 2t_2^2 - t_3^2}.$$

20) **Aufgabe.** Ein Dreieck aus den Mittellinien zu konstruieren.

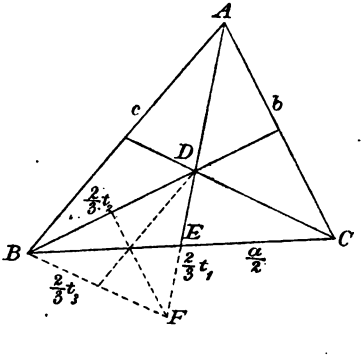
Die Auflösung mit Hülfe der letzten Formeln ist eine einfache Anwendung des Pythagoreischen Lehrsatzes. Noch einfacher ist die in Teil I Geom. Nr. 123 gegebene Konstruktion. In der betreffenden Figur sind $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$ und $\frac{c}{2}$ Mittellinien des Hülfsdreiecks DBF (Fig. 12), dessen Seiten $\frac{2}{3}t_1$, $\frac{2}{3}t_2$, $\frac{2}{3}t_3$ sind, so daß nach 18)

$$\frac{a}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\left(\tfrac{2}{3}t_2\right)^2 + 2\left(\tfrac{2}{3}t_3\right)^2 - \left(\tfrac{2}{3}t_1\right)^2}$$

oder

$$a = \tfrac{2}{3}\sqrt{2t_2^2 + 2t_3^2 - t_1^2}.$$

Fig. 12.



Die formelle Übereinstimmung der Ausdrücke unter Nr. 18 und 19 klärt sich somit einfach geometrisch auf.

Digitized by Google

Bemerkung. Nun hat $\triangle DBF$ den dritten Teil des Inhalts, wie $\triangle ABC$, folglich ist

$$\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$
$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{\left(\tfrac{2}{3}t_1+\tfrac{2}{3}t_2+\tfrac{2}{3}t_3\right)\left(-\tfrac{2}{3}t_1+\tfrac{2}{3}t_2+\tfrac{2}{3}t_3\right)\left(\tfrac{2}{3}t_1-\tfrac{2}{3}t_2+\tfrac{2}{3}t_3\right)\left(\tfrac{2}{3}t_1+\tfrac{2}{3}t_2-\tfrac{2}{3}t_3\right)}$$

oder $\tfrac{9}{16}(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$
$=(t_1+t_2+t_3)(-t_1+t_2+t_3)(t_1-t_2+t_3)(t_1+t_2-t_3)$.

21) **Aufgabe.** Die Höhen des Dreiecks durch die Mittellinien auszudrücken.

Auflösung. Formel $h_1=\dfrac{W}{2a}$ in Nr. 17 geht über in

$$h_1=\frac{1}{2a}\cdot\frac{4}{3}\sqrt{(t_1+t_2+t_3)(-t_1+t_2+t_3)(t_1-t_2+t_3)(t_1+t_2-t_3)}=\frac{2}{3a}W',$$

also, wenn man auch a durch die Mittellinien ausdrückt:

$$h_1=\frac{W'}{\sqrt{2t_2^2+2t_3^2-t_1^2}},\quad h_2=\frac{W'}{\sqrt{2t_3^2+2t_1^2-t_2^2}},$$
$$h_3=\frac{W'}{\sqrt{2t_1^2+2t_2^2-t_3^2}},$$

wo

$$W'=\sqrt{(t_1+t_2+t_3)(-t_1+t_2+t_3)(t_1-t_2+t_3)(t_1+t_2-t_3)}.$$

22) **Aufgabe.** Die Mittellinien des Dreiecks durch die Höhen auszudrücken.

Auflösung. Setzt man in $t_1=\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$ für b, c und a ihre Werte aus Nr. 16 ein, so erhält man

$$t_1=\sqrt{\frac{h_1^2h_2^2h_3^2(2h_3^2h_1^2+2h_1^2h_2^2-h_2^2h_3^2)}{(h_1h_2+h_2h_3+h_3h_1)(-h_1h_2+h_2h_3+h_3h_1)(h_1h_2-h_2h_3+h_3h_1)(h_1h_2+h_2h_3-h_3h_1)}},$$

woraus sich t_2 und t_3 durch cyklische Vertauschung der Indices ergeben. In der fertigen Formel ist aus $h_1^2h_2^2h_3^2$ noch die Wurzel auszuziehen.

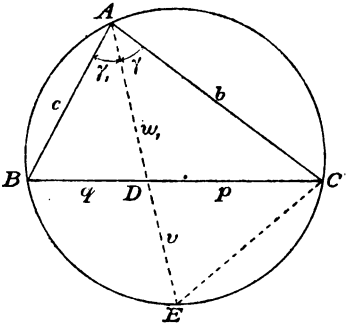
23) **Aufgabe.** Die Winkelhalbierenden w_1, w_2, w_3 eines Dreiecks aus den Seiten a, b, c zu berechnen.

Auflösung. Nach Teil I) Nr. 169 ist in Fig. 13 $p:q=b:c$, also $p=\dfrac{qb}{c}$ und $a=p+q=\dfrac{qb}{c}+q=q\dfrac{b+c}{c}$, also 1) $q=\dfrac{ac}{b+c}$ und 2) $p=\dfrac{ab}{c+b}$. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke DCE und DAB folgt $w_1:q=p:v$, oder $pq=w_1v=w_1(AE-w_1)$, also 3) $w_1^2=w_1\cdot AE-pq$. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AEC

Digitized by Google

und ABD folgt $AE : b = c : w_1$ oder $AE \cdot w_1 = bc$. Dies in 3) eingesetzt giebt

Fig. 13.



$$w_1^2 = bc - pq = bc - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2}$$

$$= bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right)$$

$$= bc\,\frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2}$$

$$= \frac{bc}{(b+c)^2}(b+c+a)(b+c-a).$$

Folglich ist

$$w_1 = \frac{\sqrt{bc(a+b+c)(-a+b+c)}}{b+c}, \quad w_2 = \frac{\sqrt{ca(a+b+c)(a-b+c}}{b+a},$$

$$w_3 = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

Bemerkung. Aus $w_1^2 = bc - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2}$ folgt $a = (b+c)\sqrt{\frac{bc - w_1^2}{bc}}$, so daß ein Dreieck aus w_1, b und c konstruiert werden kann, letzteres z. B. mittels der Proportion $\sqrt{bc} : \sqrt{bc - w_1^2} = (b+c) : a$.

Aus derselben Gleichung folgt $bc = \frac{w_1^2}{1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2}$, so daß ein Dreieck auch aus a, w_1 und der Seitensumme $(b+c)$ berechnet und konstruiert werden kann. Aus $b + c = s$ und $bc = k$, wo k der eben berechnete Wert ist, lassen sich b und c bestimmen.

Die Halbierende des Außenwinkels bei A berechnet sich in ähnlicher Weise wie w_1 als

$$w_1' = \sqrt{\frac{bc(a-b+c)(a+b-c)}{b-c}}.$$

IV. Allgemeine Bemerkungen über Konstruktionsaufgaben.

24) Aus den früheren Übungen ergiebt sich, daß die geforderten Konstruktionen entweder auf rein geometrischem Wege oder mit Hülfe von Berechnungen ausgeführt werden. Bezeichnet man also das Aufsuchen des zur Lösung führenden Weges als die Analysis der Aufgabe, so kann man einerseits von geometrischer Analysis, andererseits von algebraischer Analysis sprechen. Bei der letzteren

Digitized by Google

handelt es sich nämlich um die Auflösung von Gleichungen niederen Grades, eine Kunst, die man als Algebra zu bezeichnen pflegt.

25) Die geometrische Analysis sucht entweder Sätze auf, aus denen sich die Lösung ohne weiteres ergiebt, oder sie wendet gewisse Methoden an, mit deren Hülfe die Konstruktion ermöglicht wird.

Im ersteren Falle handelt es sich nur selten um eine planmäßige Untersuchung, die mit zwingender Notwendigkeit zum Ziele führt, sondern in der Regel darum, aus der großen Menge der vorher bearbeiteten Sätze mit geschicktem Griffe diejenigen herauszufinden, die sich im gegebenen Falle als brauchbare Werkzeuge bewähren. Auf den weniger Geübten machen daher solche Lösungen häufig den Eindruck, als habe es sich mehr um einen Kunstgriff oder ein geistreiches Kombinieren gehandelt, als um das Ergebnis einer planmäßigen Überlegung.

Man erkennt z. B. leicht, daß die Aufgabe, „einen Kreis zu konstruieren, der durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt", mit Hülfe des Satzes gelöst wird, „daß das Quadrat der Tangente gleich dem Rechteck aus der ganzen Sekante und ihrem äußeren Abschnitte ist". Dagegen staunt man bisweilen die von Geometern wie Steiner gegebenen Lösungen als Leistungen eines außergewöhnlichen Scharfsinnes an. Ein Beispiel dieser Art sei angegeben:

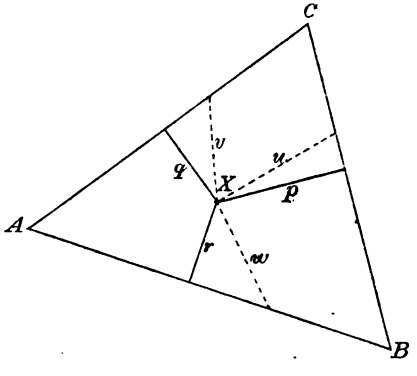
26) **Aufgabe.** In einem gegebenen Dreiecke den Punkt aufzufinden, für den die Summe der Verbindungslinien mit den Ecken den kleinsten möglichen Werth hat.

Analysis. Im gleichseitigen Dreiecke ist die Summe der von einem beliebigen Punkte aus auf die drei Seiten gefällten Lote stets gleich der Höhe, also $p + q + r = h$, was rein geometrisch abgeleitet werden kann, aber auch aus der Inhaltsformel

$$F = h\frac{a}{2} = (p + q + r)\frac{a}{2}$$

folgt. Zieht man dagegen von dem Punkte X aus beliebig gerichtete Gerade nach den drei Seiten, so ist ihre Summe $u + v + w > p + q + r$, also auch größer als h.

Fig. 14.



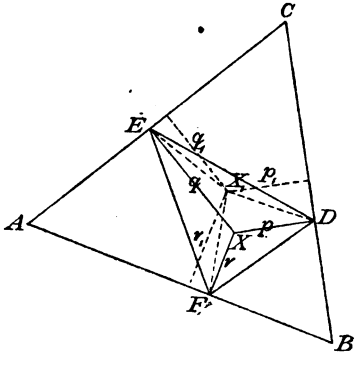
Die Lote aber bilden miteinander stets Winkel von je 120^0.

Ist nun DEF ein beliebiges Dreieck, und denkt man sich, X

Digitized by Google

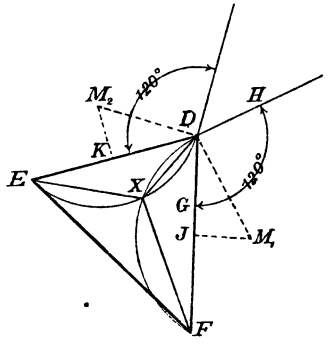
sei der Punkt, dessen Ecktransversalen unter Winkeln von je 120^0 zusammenstoßen, so erkennt man, daß die in den Eckpunkten auf den Transversalen errichteten Lote ein gleichseitiges Dreieck ABC bilden. Fällt man von einem anderen Punkte X_1 aus auf die Seiten von ABC Lote p_1, q_1, r_1, so ist $p_1 + q_1 + r_1 = p + q + r$. Verbindet man aber X_1 mit D, E und F, so ist $X_1D + X_1E + X_1F > p_1 + q_1 + r_1$, also auch größer als $p + q + r$. Da dies von jedem beliebigen Punkte X_1 gilt, so folgt, daß der Punkt X, in dem die Ecktransversalen sich unter 120^0 treffen, derjenige ist, für den die Summe der Verbindungslinien mit den Ecken den kleinsten möglichen Wert hat.

Fig. 15.



Die Konstruktion des gesuchten Punktes ist einfach. Schlage um D einen Bogen und trage auf ihm von DF aus zweimal den Radius ab, was den Punkt H giebt. Errichte in D auf HD und ebenso im Halbierungspunkte J auf DF Lote. Um den Schnittpunkt M_1 des letzteren schlage einen durch D (und F) gehenden Kreis. Wiederhole diese Konstruktion an der Seite DE, was den Punkt M_2 als Mittelpunkt eines Kreises DE giebt. Beide Kreise schneiden sich in dem gesuchten Punkte X.

Fig. 16.



Der Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion bleibe dem Schüler überlassen, ebenso die Untersuchung, wie es wird, wenn X außerhalb des Dreiecks fällt.

27) An solchen und ähnlichen Lösungen erkennt man, daß beanlagte und geübte Geometer Brücken zu schlagen verstehen, wo weniger geübte die Möglichkeit einer Verbindung gar nicht erkennen. In vielen Fällen steht zu vermuten, daß die Lösung auch nicht auf analytischem Wege gefunden ist, sondern auf Grund des umgekehrten Verfahrens. Der Geometer fand auf synthetischem Wege einen ge-

Digitized by Google

wissen Zusammenhang und erkannte, daß durch denselben eine gewisse Gruppe von Aufgaben lösbar wird. Er konnte z. B. die Konstruktion veröffentlichen und es den Mathematikern überlassen, die Analysis und den Beweis selber aufzufinden. Steiner z. B. hat dies in vielen Fällen gethan, und damit zu zahlreichen Forschungen Veranlassung gegeben.

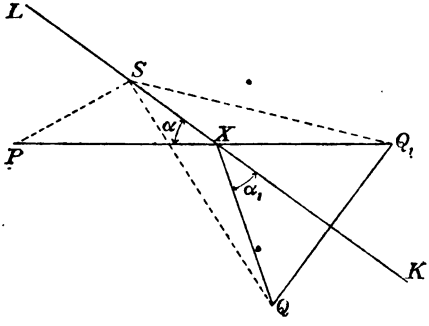
Es giebt in der That sehr ergiebige Quellensätze für größere Gruppen von Konstruktionen, nnd es ist eine nützliche Aufgabe, bei einem solchen Satze zu untersuchen, welche Art von Problemen man mit seiner Hülfe lösen kann. Solche Sätze sind z. B. die von den merkwürdigen Punkten des Dreiecks handelnden, ferner der Satz des Pythagoras, der Satz, daß die Sekante stetig geteilt ist, wenn die zugehörige Tangente gleich dem Durchmesser des Kreises ist. Auch die Beziehungen zwischen den Radien der Hauptkreise des Dreiecks geben zu zahlreichen Konstruktionen Anlaß. Sätze von hervorragender Wichtigkeit, wie der Satz vom vollständigen Viereck, die Sätze von Pascal und Brianchon werden noch zur Sprache kommen.

Kommt man mit Lehrsätzen nicht zum Ziele, so versucht man die Lösung der Aufgabe mit Hülfe gewisser Methoden. Einige davon sollen durch Beispiele erläutert werden, wobei auf systematische Vollständigkeit von vorn herein verzichtet wird. Die Analysis sei dabei stets als Auflösung bezeichnet.

28) Methode der Symmetrie oder der Spiegelbilder (Umklappung).

Aufgabe. Gegeben sei eine Gerade KL und zwei Punkte P und Q auf derselben Seite von KL. Der kürzeste Weg von P zur Geraden und nach Q soll gefunden werden.

Fig. 17.



Auflösung. Bildet man das Spiegelbild Q_1 von Q, und ist S ein beliebiger Punkt der Geraden, so ist jedesmal $PS + SQ = PS + SQ_1$. Statt also zu untersuchen, wann $PS + SQ$ ein Minimum (kleinster Wert) ist, kann man untersuchen, wenn $PS + SQ_1$ ein solches ist. Dies geschieht aber, wenn PQ_1 als Gerade gezogen wird, was den Schnitt X giebt.

Digitized by Google

Folglich ist $PX + XQ$ der gesuchte kürzeste Weg. (Dabei ist $\alpha = \alpha_1$; vergl. Reflexion der Lichtstrahlen. Die Aufgabe kommt bei der Ellipse zu wichtiger Anwendung. Sie kann dahin verallgemeinert werden, daß man nach dem kürzesten Wege von einem Punkte P nach einer Geraden KL, nach einer zweiten Geraden K_1L_1, nach einer dritten K_2L_2 und nach einem Punkte Q sucht.)

Liegen P und Q auf verschiedenen Seiten der Geraden, so handelt es sich um die Aufsuchung der größten möglichen Differenz $PS - SQ$, wobei ebenfalls $\alpha = \alpha_1$ wird. (Die Aufgabe ist wichtig für die Hyperbel.)

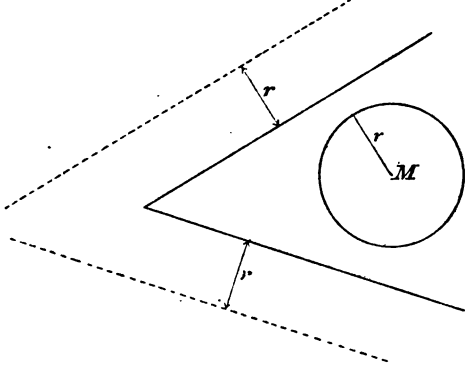
An Stelle von Q kann man einen um Q geschlagenen Kreis treten lassen und z. B. den Weg eines Lichtstrahles suchen, der von P zur Geraden geht, dort unter demselben Winkel zurückgeworfen wird und den Kreis um Q berührt.

Häufig ist an der Aufgabe ohne weiteres die Symmetrie der fertigen Zeichnung gegen irgend eine Gerade zu erkennen, woraus sich sofort neue Elemente für die Konstruktion ergeben. Soll z. B. ein Kreis gezeichnet werden, der zwei Gerade berührt und durch einen gegebenen Punkt geht, so findet Symmetrie gegen die Halbierungslinie des Winkels statt, was sofort einen zweiten Punkt giebt. Darauf beruht eine der verschiedenen Konstruktionen.

28) Methode der Parallelverschiebungen.

Aufgabe. Einen Kreis zu konstruieren, der einen gegebenen Kreis und zwei gegebene Gerade berührt.

Fig. 18.



Auflösung. Man verschiebt jede der Geraden parallel zu sich selbst um r. Gelingt es dann, den Kreis zu zeichnen, der die Hülfslinien berührt und durch M geht, so hat man den Mittelpunkt des wirklich gesuchten Kreises gefunden.

Verschiebt man beide Geraden in entgegengesetzter Richtung, wie in der Figur, so erhält man die innere Berührung an Stelle der äußeren.

Digitized by Google

Bisweilen kann man die Figur durch parallele Verschiebung einzelner Geraden in günstiger Weise umgestalten. Dies geschah z. B. bei der Konstruktion des Dreiecks aus den drei Mittellinien. (Vergl. Teil I, Nr. 123.)

Aufgabe. Gegeben seien zwei auseinanderliegende Kreise. Von der Peripherie des einen soll zu der des anderen eine Gerade von gegebener Richtung und Länge gelegt werden.

Auflösung. Man verschiebe den einen der Kreise um die entsprechende „Strecke". Die beiden Schnittpunkte sind die Ausgangspunkte der gesuchten Geraden.

Auch Parallelverschiebung mehrerer Punkte führt bisweilen zum Ziele, z. B. bei folgender

Aufgabe. Gegeben seien zwei Gerade und ein zwischen ihnen liegender Punkt. Durch den Punkt von der einen Geraden zur anderen eine Gerade zu legen, die durch den Punkt in gegebenem Verhältnis geteilt ist.

Auflösung. Angenommen, eine durch den Punkt gelegte Gerade sei in dem verlangten Verhältnis geteilt. Legt man dann durch den Punkt eine Parallele zu der einen der gegebenen Geraden, so ist der Abschnitt der anderen ebenfalls im gegebenen Verhältnis geteilt. (Handelt es sich z. B. um das Verhältnis 3 : 5, so ist der Abschnitt in 8 gleiche Teile zerlegt, und die Parallele schneidet 3 von den Teilen ab.) Aus dieser Bemerkung folgt die Konstruktion.

29) Methode der koncentrischen Verschiebung. Jeder Punkt eines Kreises wird auf dem Radius nach einem koncentrischen Kreise hin verschoben. Diese Methode ist eigentlich schon bei dem Kreise der drittletzten Aufgabe zur Anwendung gekommen. In allgemeiner Form erscheint sie bei der später zu behandelnden Aufgabe, einen Kreis zu konstruieren, der drei gegebene Kreise berührt. Man zieht den Radius r des kleinsten Kreises von denen der beiden anderen ab und erhält koncentrische Hülfskreise. Die Aufgabe wird damit auf die zurückgeführt, einen Kreis zu konstruieren, der zwei gegebene Kreise berührt und durch einen gegebenen Punkt geht. Vergrößert man die beiden Radien um r, so erhält man die innere Berührung am ersten statt der äußeren.

30) Methode der Ähnlichkeit. Man konstruiert statt des verlangten Gebildes zunächst ein ihm ähnliches. So kann z. B. die Konstruktion eines regelmäßigen Polygons über einer gegebenen Geraden erfolgen, indem man ein solches zunächst in einen beliebigen Kreis einzeichnet und dann die Figur auf den richtigen Maßstab bringt.

Digitized by Google

Aufgabe. In ein gleichschenkliges Dreieck ein Quadrat einzuzeichnen. Man zeichnet erst ein beliebiges Quadrat (auf der Grundlinie) mit der Höhe als Symmetrieachse und projiziert die Ecken von A aus auf die Schenkel. (Fig. 19.)

Fig. 19.

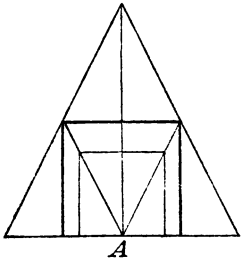
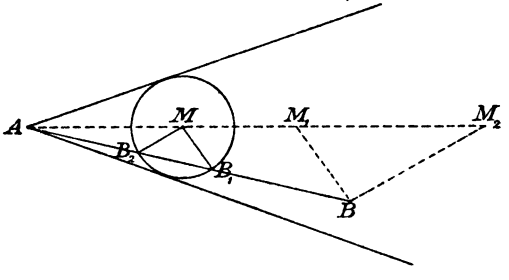


Fig. 20.



Aufgabe. Einen Kreis zu zeichnen, der zwei gegebene Gerade berührt und durch einen gegebenen Punkt B geht.

Auflösung. Man zeichne zunächst einen beliebigen Berührungskreis. Die Gerade AB giebt Schnittpunkte B_1 und B_2 und Radien B_1M und B_2M. Jetzt hat man die ähnliche Zeichnung. Die Parallelen BM_1 und BM_2 zu jenen beiden Radien sind die gesuchten Radien. (An dieser Aufgabe erkennt man die Wichtigkeit der perspektivischen Lage.)

Aufgabe. Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, dessen Ecken in drei gegebenen Parallelen AB, A_1B_1, A_2B_2 liegen.

Fig. 21.

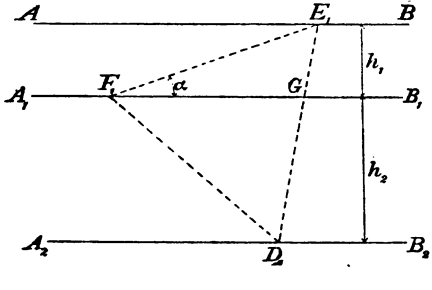
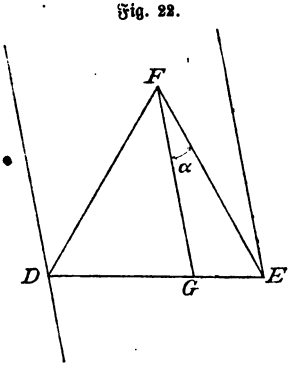


Fig. 22.



Auflösung. Man zeichne ein gleichseitiges Dreieck DEF (Fig. 22) von beliebiger Größe und teile DE im Verhältnis $h_1 : h_2$. Zieht man durch D und E Parallele zur Teilungstransversale FG, so hat man die

Digitized by Google

ähnliche Zeichnung. Eintragung des Winkels α in die gegebene Figur 21 genügt zur Vollendung der Aufgabe. (Später andere Konstruktion.)

Auf entsprechende Weise gelingt die Lösung der Aufgabe, ein gegebenes gleichseitiges Dreieck mit den Ecken in drei von einem Punkte ausgehende Strahlen zu legen. Es ist nur nötig, über zwei Seiten des Dreiecks Kreisbogen zu schlagen, die den von den Strahlen gebildeten Winkeln entsprechen. Die in diesem Falle kongruente Figur ist dann in die richtige Lage zu bringen. (Auch dafür später eine andere Lösung.)

Die beiden letzten Aufgaben sind eigentlich mit Hülfe der umgekehrten Aufgabe gelöst, was als besondere Methode behandelt werden kann.

31) Methode der Umkehrung der Aufgabe.

Aufgabe. Ein Quadrat in ein gleichseitiges Dreieck von derselben Fläche zu verwandeln.

Auflösung. Man verwandelt zunächst ein gleichseitiges Dreieck von beliebiger Größe in ein Rechteck und dieses in ein Quadrat. Jetzt hat man das Verhältnis zwischen Quadrat- und Dreiecksseite für den Fall der Flächengleichheit. Die Seite des gesuchten gleichseitigen Dreiecks kann jetzt als vierte Proportionale konstruiert werden.

Entsprechend läßt sich jedes Quadrat in ein Vieleck verwandeln, welches einem gegebenen ähnlich ist; also jedes Vieleck in ein flächengleiches, welches einem beliebigen anderen Vieleck ähnlich ist.

Aufgabe. Eine gegebene Gerade so zu verlängern, daß eine stetig geteilte Gerade entsteht, wobei die erstere der kleinere (bezw. größere) Teil sein soll.

Auflösung. Man teile eine beliebige Gerade nach dem goldenen Schnitt und konstruiere das fehlende Stück der gegebenen als vierte Proportionale.

Die Lösungen mit Hülfe der Umkehrung der Aufgabe sind in der Regel nicht als elegant zu bezeichnen.

32) Methode der Drehung.

Die vorige Aufgabe, eine gegebene Gerade AB so zu verlängern, daß eine stetig geteilte Gerade entsteht, wobei sie selbst der kleinere Teil sein soll, kann folgendermaßen gelöst werden: Man schlage über AB als Durchmesser einen Kreis, lege an einen beliebigen Punkt C eine Tangente $CD = AB$, und schlage um M mit MD einen Kreis, der die Verlängerung von AB in dem gesuchten Punkte X schneidet.

Digitized by Google

(Die Tangente CD ist dabei in die Lage XY gedreht worden, was der früheren Konstruktion des goldenen Schnitts entspricht.)

Fig. 23.

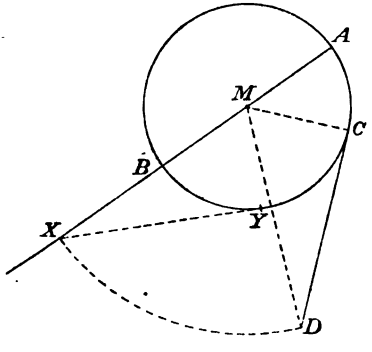
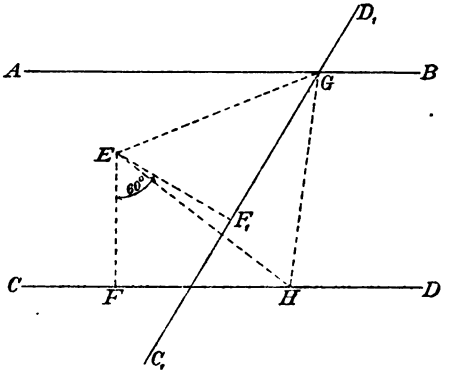


Fig. 24.



Aufgabe. Ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren, welches mit den Ecken auf zwei gegebenen Parallelen AB und CD und einem gegebenen Punkte E liegt.

Auflösung. Man ziehe das Lot EF, drehe EF um 60^0 in die Lage EF_1, errichte in F_1 auf EF_1 ein Lot, welches die G schneidet. EG ist Basis des gesuchten Dreiecks.

Dreht man nämlich die Gerade C_1D_1 um E in die ursprüngliche Lage zurück, so fällt G nach H, und $\sphericalangle GEH$ ist gleich 60^0.

Dieselbe Lösung gilt für zwei beliebige Gerade und einen Punkt E. (Vergleiche Abschnitt 30.)

Aufgabe. Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, dessen Ecken auf einem gegebenen Kreise, einer gegebenen Geraden und einem gegebenen Punkte E liegen.

Auflösung. Man drehe die Gerade um E, und zwar um 60^0. Die Schnittpunkte K und K_1 mit dem Kreise geben die Grundlinien EK und EK_1 für zwei verschiedene Dreiecke der gesuchten Art. — Man kann auch den Kreis um den Punkt E drehen (ebenfalls um 60^0).

Aufgabe. Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, dessen Ecken auf zwei gegebenen Kreisen und einem Punkte liegen. (Ebenfalls zwei Lösungen nach derselben Art.)

Aufgabe. Ein gleichseitiges Dreieck mit den Ecken auf die Seiten eines anderen gleichseitigen Dreiecks oder deren Verlängerungen zu legen.

Digitized by Google

Auflösung. Man lege beide Dreiecke mit den Mittelpunkten aufeinander und drehe das eine in entsprechender Weise um den Mittelpunkt.

(Nach obigem lassen sich unzählige gleichseitige Dreiecke mit den Ecken auf die Seiten eines gegebenen Dreiecks von beliebiger Gestalt legen. Jedem Seitenpunkte entspricht ein bestimmtes gleichseitiges Dreieck.)

Aufgabe. Durch die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks die Seiten eines gegebenen gleichseitigen Dreiecks zu legen.

Wie vorher zu lösen.

Aufgabe. Von einem gegebenen Punkte aus an einen gegebenen Kreis und eine gegebene Gerade (oder an zwei gegebene Kreise, oder an zwei gegebene Gerade) zwei gleichlange Gerade zu ziehen, die einen gegebenen Winkel (z. B. von 30^0) einschließen.

Statt der Drehung um 60^0 wird eine um 30^0 vorgenommen, sonst ist alles wie vorher.

33) Die Methode des geometrischen Ortes.

a) Der geometrische Ort aller Punkte, die von einer gegebenen Geraden dieselbe Entfernung haben, wird durch zwei Parallele in entsprechendem Abstande gebildet.

b) Der geometrische Ort aller Punkte, deren jeder von zwei gegebenen Geraden gleichen Abstand hat, ist durch die beiden Halbierungslinien ihrer Winkel gegeben.

c) Der geometrische Ort aller Punkte, die von einem gegebenen Punkte gleichen Abstand haben, ist ein um ihn geschlagener Kreis.

d) Der geometrische Ort aller Punkte, deren jeder von zwei gegebenen Punkten gleichen Abstand hat, ist die Mittelsenkrechte ihrer Verbindungslinie.

e) Der geometrische Ort aller Punkte, die von einem gegebenen Kreise gleichen Abstand haben, ist durch zwei koncentrische Kreise bestimmt.

f) Der geometrische Ort für die Spitzen gleicher Winkel, deren Schenkel Tangenten eines Kreises sind, ist ein koncentrischer Kreis.

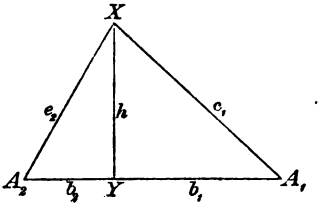
g) Der geometrische Ort für die Spitzen gleicher Winkel über einer gegebenen Geraden ist ein Kreisbogen durch ihre Endpunkte.

h) Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Differenz der Quadrate ihrer Abstände von zwei gegebenen Punkten konstant ist, ist eine Senkrechte auf der Verbindungslinie.

Digitized by Google

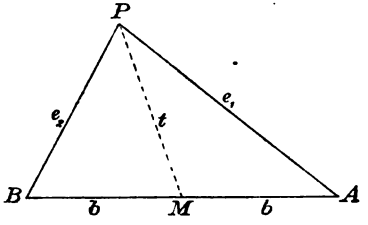
(Denn $e_1^2 - e_2^2 = (b_1^2 + h^2) - (b_2^2 + h^2) = b_1^2 - b_2^2$, wie hoch auch der Punkt X liegen mag. Also ist das Lot der geometrische Ort. (Fig. 25.)

Fig. 25.



h) Der geometrische Ort aller Punkte, von denen aus die Tangenten an zwei gegebene Kreise gleich sind, steht senkrecht auf der Centrale. Schneiden sich die Kreise, so handelt es sich um die gemeinschaftliche Sekante; liegen sie auseinander, so handelt es sich um das Lot, welches vom Halbierungspunkte einer gemeinschaftlichen Tangente auf die Centrale gefällt ist. Wird der eine vom anderen umschlossen, so findet man das Lot folgendermaßen. Man zieht von dem kleineren Kreise aus eine Tangente, die über den größeren hinausragt; eine gleich große Tangente lege man an den größeren Kreis. Die Endpunkte beider Tangenten drehe man um den Mittelpunkt des zu jeder gehörigen Kreises. Wo sich die beiden Hülfskreise schneiden, dort ist der Punkt, von dem aus das Lot auf die Centrale zu fällen ist.

Fig. 26.



i) Der geometrische Ort aller Punkte P, für welche die Summe der Quadrate ihrer Abstände von zwei gegebenen konstant ist, ist ein Kreis um den Halbierungspunkt ihrer Verbindungslinie.

(In Fig. 26 ist M der Halbierungspunkt von AB, also $e_1^2 = t^2 + b^2 + 2pt$ und $e_2^2 = t^2 + b^2 - 2pt$, wo p die Projektion von t auf AB ist. Folglich ist $e_1^2 + e_2^2 = 2t^2 + 2b^2$ und $t = \sqrt{\frac{e_1^2 + e_2^2 - 2b^2}{2}}$, d. h. t eine konstante Länge.

Bemerkung. In der Elementargeometrie handelt es sich nur um Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. Der geometrische Ort für einen zu konstruierenden Punkt ist also stets eine Gerade oder ein Kreis. Wir werden noch einige andere Fälle kennen lernen, wo beide als geometrischer Ort auftreten. Die obigen Fälle genügen zur Lösung zahlreicher Aufgaben.

34) Führen die angegebenen geometrischen Wege nicht zum Ziele, so versucht man es mit der Methode der algebraischen Analysis, d. h. man betrachtet ein geeignetes Stück als Unbekannte x, versucht eine Gleichung aufzustellen, welche die Unbekannte enthält und löst die Gleichung auf. (Beispiele zu diesem Verfahren enthält schon der erste Teil.)

Digitized by Google

Enthält nun der Ausdruck für die Unbekannte x z. B. Kubikwurzeln, was bei Gleichungen dritten Grades geschieht, so ist es im allgemeinen unmöglich, ihn mit Zirkel und Lineal zu konstruieren, d. h. die Aufgabe ist nicht mit Zirkel und Lineal lösbar. Dagegen ist sie lösbar, wenn nur Quadratwurzeln oder Quadratwurzeln aus Quadratwurzeln oder gar keine Wurzeln vorkommen. Die Gleichungen dürfen allerdings nicht transcendente sein. Über die zu konstruierenden Ausdrücke ist das Nötige im ersten Teil gesagt. —

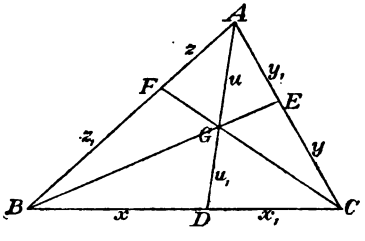
Der neueren Geometrie ist es gelungen, eine große Anzahl von Aufgaben, die man früher gar nicht oder nur mit Hülfe komplizierter Rechnungen zur Lösung bringen konnte, in sehr einfacher Weise zu lösen. Dies ist dadurch möglich geworden, daß es gelang, Beziehungen aufzufinden, die projektivischer Natur sind (d. h. bei jeder Projektion erhalten bleiben), die also unabhängig von den Maßbeziehungen sind. Man unterscheidet daher zwischen der Geometrie des Maßes und der Geometrie der Lage. Der Unterschied zwischen beiden wird sich durch die folgenden Abschnitte aufklären, obwohl vorläufig nur von Geraden und Kreisen, nicht aber von den Projektionen des Kreises gesprochen werden soll. —

Bemerkung. Hat man eine Aufgabe grundsätzlich (im Prinzip) gelöst, so gebe man sich nicht ohne weiteres zufrieden, sondern suche jetzt erst eine möglichst kurze (elegante) Lösung. In diesem Sinne unterschied Steiner zwischen der Lösung mit dem Munde und der Lösung mit der Hand.

V. Übergang zur neueren Geometrie.

35) **Satz des Ceva.** Die von den Ecken eines Dreiecks aus durch einen Punkt gezogenen Transversalen*) teilen die Gegenseiten so, daß die Produkte aus je drei nicht zusammenhängenden Seitenabschnitten einander gleich sind.

Fig. 27.



Beweis. In Fig. 27 verhalten sich die Inhalte der auf derselben Grundlinie AG stehenden Dreiecke AGB und AGC wie die zu-

*) Eine Transversale ist eine Gerade, die willkürlich quer durch ein System gegebener Geraden gelegt wird.

Digitized by Google

gehörigen Höhen. Die letzteren, d. h. die von B und C aus auf AG gefällten Lote, verhalten sich aber wie x und x_1. (Warum?) Demnach bestehen im ganzen folgende Beziehungen:

$$\frac{\triangle AGB}{\triangle AGC} = \frac{x}{x_1}, \quad \frac{\triangle BGC}{\triangle BGA} = \frac{y}{y_1}, \quad \frac{\triangle CGA}{\triangle CGB} = \frac{z}{z_1}.$$

Multipliziert man die linken und ebenso die rechten Seiten dieser Gleichungen mit einander, so entsteht eine Gleichung, auf deren linker Seite sich alles hebt, also

$$1 = \frac{xyz}{x_1 y_1 z_1}, \quad \text{oder} \quad xyz = x_1 y_1 z_1.$$

(Der Punkt G darf auch außerhalb des Dreiecks liegen.)

36) **Umkehrung.** Teilt man die Dreiecksseiten so, daß die Produkte aus je drei nicht zusammenhängenden Stücken einander gleich sind, so gehen die Verbindungslinien der Teilpunkte mit den Gegenecken durch **einen** Punkt.

(Der Beweis wird indirekt geführt. Man nimmt an, die dritte Transversale CF' ginge nicht durch G, obwohl $xyz = x_1 y_1 z_1$ ist. Man zieht dann CGF, wobei $xyz' = x_1 x_1 z_1'$ wird. Durch Division folgt aus beiden Gleichungen $\frac{z}{z'} = \frac{z_1}{z_1'}$ oder $\frac{z}{z_1} = \frac{z'}{z_1'}$. Da aber die innere Teilung von AB im Verhältnis $\frac{z}{z_1}$ und im Sinne der Fig. 27 nur einen einzigen Teilpunkt giebt, so müssen F und F' zusammenfallen, und auch CF' muß durch G gehen.)

37) [Beweis auf Grund der Schwerpunktslehre (barycentrischer Beweis). Man denke sich in A, B und C willkürliche Massen m_1, m_2, m_3. Ist nun $\frac{m_1}{m_2} = \frac{z_1}{z}$, so ist F der Schwerpunkt der beiden Massen. Ist $\frac{m_3}{m_3} = \frac{x_1}{x}$, so ist D der Schwerpunkt dieser Massen. Ist $\frac{m_2}{m_1} = \frac{y_1}{y}$, so ist E der Schwerpunkt der letzteren Massen. Dabei ist $\frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{m_2}{m_3} \cdot \frac{m_3}{m_1} = \frac{z_1}{z} \cdot \frac{x_1}{x} \cdot \frac{y_1}{y}$, oder $1 = \frac{x_1 y_1 z_1}{xyz}$, wie oben. Weil nun F der Schwerpunkt von m_1 und m_2 ist, so liegt der Schwerpunkt G aller drei Massen auf FC. Aus demselben Grunde liegt er auch auf DA und auf EB. Da es aber nur einen einzigen gemeinschaftlichen Schwerpunkt giebt, müssen sich die drei Geraden in einem einzigen Punkte schneiden. Aus $x_1 y_1 z_1 = xyz$ folgt also das Schneiden der

Digitized by Google

drei Geraden in demselben Punkte. — Statt der Massen in A, B und C kann man sich auch parallele Kräfte denken. Ist eine davon zu den beiden anderen entgegengesetzt gerichtet, so erhält man einen von den Fällen, wo G außerhalb des Dreiecks liegt.

Zugleich ist nach dem Schwerpunktsgesetze $\frac{AG}{DG} = \frac{m_2 + m_3}{m_1} = \frac{z}{z_1} + \frac{y_1}{y}$ $= \frac{yz + y_1 z_1}{y z_1}$.

Setzt man $AG = u$, $DG = u_1$ und entsprechend die Abschnitte der anderen Transversalen gleich v, v_1, w, w_1, so hat man die Gleichungen:

$$\frac{u}{u_1} = \frac{yz + y_1 z_1}{y z_1}, \quad \frac{v}{v_1} = \frac{zx + z_1 x_1}{z x_1}, \quad \frac{w}{w_1} = \frac{xy + x_1 y_1}{x y_1}.$$

Aus $xyz = x_1 y_1 z_1$ folgt $y = \frac{x_1 y_1 z_1}{xz}$. Dies, in die erste der Gleichungen eingesetzt, verwandelt sie in $\frac{u}{u_1} = \frac{(x + x_1) z}{x_1 z_1}$, oder in $x_1 u z_1 = (x + x_1) u_1 z$. So ergiebt sich für das von der Transversale FC geschnittene Dreieck ABD eine neue Beziehung: der nachstehend geometrisch bewiesene Satz des Menelaos.]

38) **Bemerkungen.** Sind die Dreiecksseiten halbiert, so erhält man aus dem Satze des Ceva die Sätze von den Mittellinien und dem gewöhnlichen Dreiecksschwerpunkte. Die Verbindungslinien der Berührungspunkte des In-Kreises mit den Gegenecken des Dreiecks müssen sich ebenfalls nach Ceva in einem Punkte schneiden, da je zwei Tangenten gleich sind. Entsprechendes gilt von den An-Kreisen. Die Höhen des Dreiecks schneiden sich in einem Punkte, denn aus der Ähnlichkeit gewisser Dreiecke folgen in obiger Beziehung die Gleichungen $xy = y_1 z_1$, $yz = z_1 x_1$, $zx = x_1 y_1$, aus denen man durch Multiplikation u. s. w. $x_1 y_1 z_1 = xyz$ erhält. —

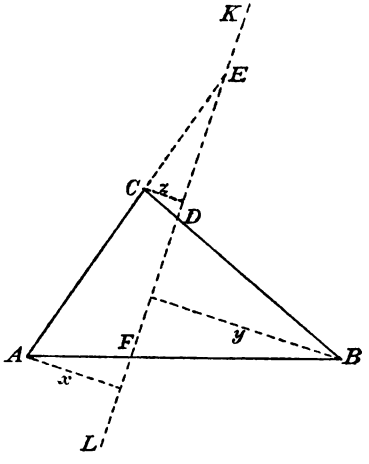
Durch Parallel- oder Centralprojektion geht die Fig. 27 in eine andere über, von der wiederum der Satz des Ceva gilt. Die durch den letzteren ausgesprochene Eigenschaft des Dreiecks bleibt also bei jeder Projektion des Dreiecks erhalten. Man nennt solche Eigenschaften der Figuren projektivische Eigenschaften.

39) **Satz des Menelaos.** Werden die Seiten eines Dreiecks (oder ihre Verlängerungen) durch eine Transversale geschnitten, so sind die Produkte aus je drei nicht zusammenhängenden Seitenabschnitten einander gleich.

Digitized by Google

Beweis. In Fig. 28 sei KL die das Dreieck ABC schneidende Transversale. Die Schnittpunkte mit den Seiten seien D, E und F. Die Entfernungen der Ecken von der Transversale seien x, y, z. Aus der Ähnlichkeit entsprechender Dreiecke folgt

Fig. 28.



$$\frac{AF}{BF}=\frac{x}{y},\quad \frac{BD}{CD}=\frac{y}{z},\quad \frac{CE}{AE}=\frac{z}{x},$$

durch Multiplikation demnach

$$\frac{AF\cdot BD\cdot CE}{BF\cdot CD\cdot AE}=\frac{xyz}{xyz}=1,$$

oder

$$AF\cdot BD\cdot CE = BF\cdot CD\cdot AE.$$

40) **Umkehrung.** Wählt man auf den Seiten eines Dreiecks (bzw. den Verlängerungen der einen oder aller drei Seiten) Teilpunkte so, daß die Produkte aus je drei nicht zusammenhängenden Seitenabschnitten einander gleich sind, so liegen die Teilpunkte auf einer Geraden.

Der Beweis ist indirekt in derselben Weise zu geben, wie bei der Umkehrung des Satzes des Ceva.

41) **Bemerkungen.** Aus dem Satze des Menelaos folgt der des Ceva. Betrachtet man nämlich in Fig. 27 das Dreieck ABD als von FC geschnitten und das Dreieck ACD als von BE geschnitten, so ergeben sich nach Menelaos zwei Gleichungen, aus denen durch Division die des Ceva folgt.

Auch der Satz des Menelaos ist eine Eigenschaft, die bei beliebigen Projektionen der zugehörigen Figur erhalten bleibt.

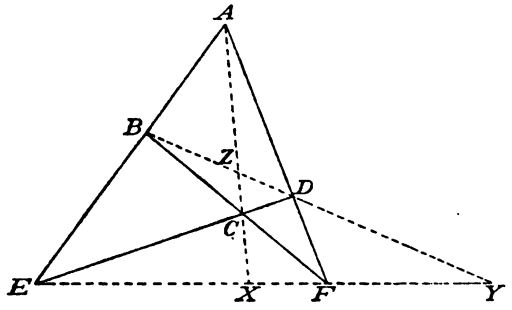
Unter vollständigem Vierseit versteht man vier Gerade mit ihren sechs Schnittpunkten, so daß es hier drei Diagonalen giebt. Aus den Sätzen des Menelaos und Ceva ergiebt sich über das vollständige Vierseit der folgende wichtige (projektivische) Satz, von dem später ein von aller Rechnung unabhängiger Beweis gegeben werden soll:

42) **Satz vom vollständigen Vierseit.** Die drei Diagonalen des vollständigen Vierseits teilen einander harmonisch.

Digitized by Google

Beweis. A, B, C, D, E, F seien die Ecken des vollständigen Vierseits, X, Y, Z die Schnittpunkte der Diagonalen. Nach Ceva ist im Dreiecke AEF

Fig. 29.



$$1. \quad \frac{AB \cdot EX \cdot FD}{BE \cdot XF \cdot DA} = 1.$$

Nach Menelaos ist in demselben durch BY geschnittenen Dreiecke

$$2. \quad \frac{AB \cdot EY \cdot FD}{BE \cdot FY \cdot DA} = 1.$$

Durch Division erhält man aus beiden Gleichungen eine neue, in der sich alles weghebt, bis auf

$$3. \quad \frac{EX}{XF} = \frac{EY}{FY}.$$

Demnach ist zunächst die Diagonale EF in X und Y harmonisch geteilt. (E und F, ebenso X und Y sind nach Teil I Nr. 168 zugeordnete Punkte.)

Wird nun Fig. 29 in irgend einer Weise auf eine andere Ebene projiziert, so bleiben die Gleichungen 1. und 2. bestehen, folglich auch Gleichung 3. Ist also eine Gerade harmonisch geteilt, so ist auch ihre Projektion durch die projizierten Teilpunkte harmonisch geteilt. Die harmonische Teilung ist demnach eine projektivische Eigenschaft. Zieht man nun in Fig. 29 AY, so sind die Punkte $EFXY$ von A aus auf BY projiziert, folglich sind $BDZY$ harmonische Punkte. Zieht man noch EZ, so sind die Punkte $BDZY$ von E aus auf AX projiziert, folglich sind auch $ACZX$ harmonische Punkte.

Aufgabe. Zu drei Punkten E, F, X (oder E, F, Y), von denen E und F zugeordnet sind, mit dem Lineal allein den vierten harmonischen zu konstruieren.

Die Lösung erfolgt durch Wiederherstellung der Fig. 29 aus E, F und X unter beliebiger Annahme von A u. s. w.

Bemerkung. Gerade der Umstand, daß auch dieser Satz von Maßbeziehungen unabhängig ist und die Konstruktion des vierten harmonischen Punktes ohne den Zirkel gestattet, läßt vermuten, daß noch eine andere Art von Beweisführung möglich ist, die aus dem Bereiche der (Euklidischen) Geometrie des Maßes ganz herausgeht. Die wichtigen Folgerungen dieses Satzes bleiben daher bis zum späteren Beweise vorbehalten.

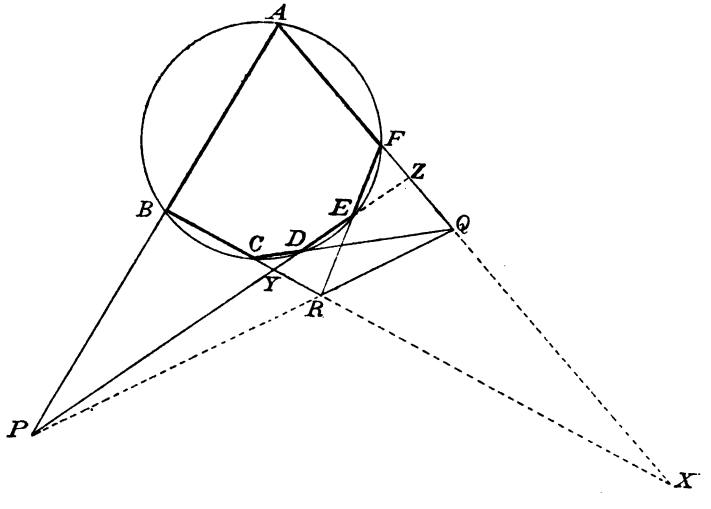
Digitized by Google

Aus dem Satze des Menelaos läßt sich der Pascalsche Satz vom Sehnensechseck ableiten, der als ein grundlegender Satz der neueren Geometrie zu betrachten ist. Später soll er unabhängig von den ersteren Sätzen bewiesen werden.

43) **Satz des Pascal.** Die Gegenseiten des Sehnensechsecks schneiden sich in drei Punkten, die auf einer Geraden liegen.

Beweis. In Fig. 30 sei $ABCDEF$ das Sehnensechseck, P, Q und R seien die Schnittpunkte der Gegenseiten, X, Y und Z die Schnittpunkte der nicht zusammenstoßenden (alternierenden) Seiten BC, DE und FA.

Fig. 30.



Das Dreieck XYZ wird von drei Transversalen AB, CD und EF geschnitten. Nach Menelaos gelten also für jede derselben folgende Gleichungen:

$$AX \cdot BY \cdot PZ = AZ \cdot BX \cdot PY$$
$$CY \cdot DZ \cdot QX = CX \cdot DY \cdot QZ$$
$$EZ \cdot FX \cdot RY = EY \cdot FZ \cdot RX;$$

durch Multiplikation folgt

1. $$\underline{AX} \cdot \underline{BY} \cdot PZ \cdot \underline{CY} \cdot \underline{DZ} \cdot QX \cdot \underline{EZ} \cdot \underline{FX} \cdot RY$$
$$= \underline{AZ} \cdot \underline{BX} \cdot PY \cdot \underline{CX} \cdot \underline{DY} \cdot QZ \cdot \underline{EY} \cdot \underline{FZ} \cdot RX.$$

Außerdem ist nach dem Sekantensatze:

Digitized by Google

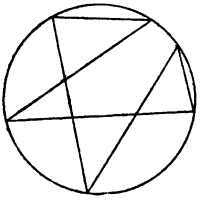
$XA \cdot XF = XB \cdot XC$, $YB \cdot YC = YD \cdot YE$, $ZD \cdot ZE = ZA \cdot ZF$,

also durch Multiplikation

2. $XA \cdot XF \cdot YB \cdot YC \cdot ZD \cdot ZE = XB \cdot XC \cdot YD \cdot YE \cdot ZA \cdot ZF$.

Aus 1. und 2. folgt durch Division (und Hebung der unterstrichenen Faktoren) $PZ \cdot QX \cdot RY = PY \cdot QZ \cdot RX$.

Fig. 30a.

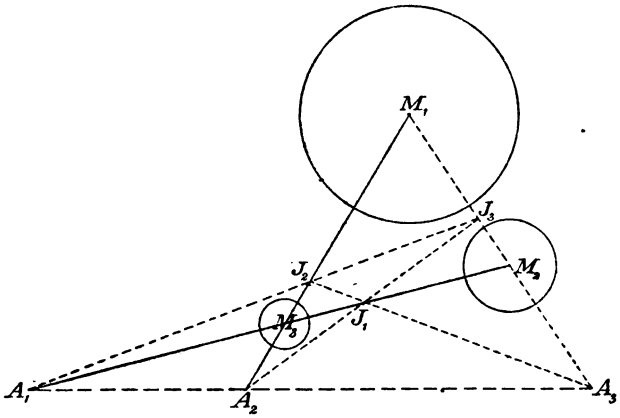


Dies entspricht wiederum dem Satze des Menelaos. Folglich liegen P, Q und R auf einer Geraden, der sogenannten Pascalschen Linie des Sehnensechsecks.

Bemerkung. Die Seiten des Sehnensechsecks dürfen sich auch gegenseitig schneiden, wie in Fig. 30a, nur muß die Figur eine geschlossene sein. Auch die wichtigen Folgerungen dieses Satzes werden auf später verschoben. Dasselbe gilt von folgendem Satze über die Ähnlichkeitspunkte von drei Kreisen (vgl. Teil I. Nr. 166).

44) **Satz.** Die sechs Ähnlichkeitspunkte dreier Kreise liegen in Gruppen zu dreien auf vier geraden Linien.

Fig. 31.



Beweis. Es ist nach Teil I. Nr. 162 und 166

$$\frac{M_1 A_3}{M_2 A_3} = \frac{r_1}{r_2}, \quad \frac{M_2 A_1}{M_3 A_1} = \frac{r_2}{r_3}, \quad \frac{M_3 A_2}{M_1 A_2} = \frac{r_3}{r_1},$$

folglich durch Multiplikation

$$\frac{M_1 A_3 \cdot M_2 A_1 \cdot M_3 A_2}{M_2 A_3 \cdot M_3 A_1 \cdot M_1 A_2} = \frac{r_1 r_2 r_3}{r_2 r_3 r_1} = 1,$$

Digitized by Google

was dem Satze des Menelaos entspricht, so daß A_1, A_2, A_3 auf gerader Linie liegen müssen.

In derselben Weise wird bewiesen, daß $A_1 J_2 J_3$, $A_2 J_3 J_1$ und $A_3 J_1 J_2$ auf gerader Linie liegen.

Bemerkung. Nach Art des Satzes des Menelaos läßt sich der Beweis direkt folgendermaßen führen:

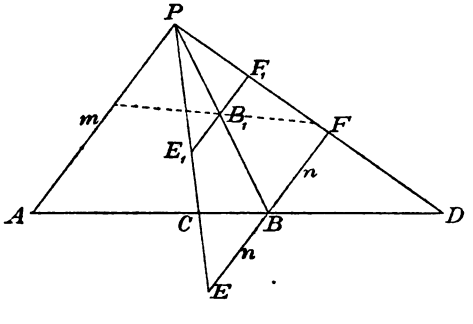
Man fälle von M_1, M_2 und M_3 aus Lote e_1, e_2, e_3 auf die Gerade $A_3 A_2$. Weil $A_2 A_3$ durch A_3 geht, so folgt $\frac{e_1}{e_2} = \frac{M_1 A_3}{M_2 A_3}$, also auch $\frac{e_1}{e_2} = \frac{r_1}{r_2}$. Ebenso folgt, weil $A_2 A_3$ durch A_2 geht, $\frac{e_3}{e_1} = \frac{r_3}{r_1}$. Folglich erhält man durch Multiplikation $\frac{e_3}{e_2} = \frac{r_3}{r_2}$. Weil aber die von M_3 und M_2 ausgehenden Parallelen e_3 und e_2 sich wie die Radien der Kreise M_3 und M_2, also auch wie $M_3 A_1$ zu $M_2 A_1$ verhalten, so muß die Verbindungslinie der Endpunkte von e_3 und e_2 durch den Ähnlichkeitspunkt A_1 gehen. Diese Verbindungslinie fällt aber mit $A_2 A_3$ zusammen, also liegen A_1, A_2 und A_3 auf einer Geraden.

Ebenso ist der Beweis für die anderen Gruppen.

VI. Harmonische Punkte und Strahlen.

45) Wird eine Gerade AB im Verhältnis $m : n$ innerlich und äußerlich (harmonisch) geteilt, so daß die Gleichung $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{BD}$ erfüllt ist, so nennt man diese Doppelteilung nach Teil I 168 eine harmonische, die Punkte $ABCD$ sind harmonische Punkte, und zwar sind A und B zugeordnete, ebenso C und D.

Fig. 32.



Bei der früher angegebenen Konstruktion war m beliebig von A aus gezogen, n parallel von B aus, sowohl gleich-, als auch entgegengesetzt-gerichtet, worauf die Endpunkte von m mit denen der beiden n verbunden wurden, was auf die Schnittpunkte C und D führte.

Ist $m = n$, so ist AB durch C halbiert, und D liegt in un-

Digitized by Google

endlicher Entfernung. Ist $m > n$, so liegt D rechts von AB, ist $m < n$, so liegt D links von AB. Wandert C von dem Halbierungspunkte AB der Geraden aus nach B, so wandert der Punkt D rechts von AB aus unendlicher Entfernung nach B. Wandert C von der Mitte nach A, so wandert D links von AB aus unendlicher Entfernung nach A. Für jede Lage von C existiert also eine und nur eine bestimmte Lage von D.

Aus $\frac{AB}{CB} = \frac{AD}{BD}$ folgt $\frac{DB}{BC} = \frac{DA}{CA}$, so daß die Teilung auch von rechts nach links gelesen eine harmonische ist, selbstverständlich aber mit einem anderen Teilungsverhältnis der Linie DC. Die zugeordneten Punkte C und D sind also gleichberechtigt mit A und B.

46) Legt man durch einen beliebigen Punkt B_1 der Geraden PB (oder ihrer beiderseitigen Verlängerungen) eine Parallele E_1F_1, so ist diese durch die Nachbarstrahlen ebenfalls halbiert. Jeder Strahl durch B_1 ist durch die Strahlen $P(ABCD)$, d. h. durch die Strahlen von P nach A, B, C und D harmonisch geteilt, denn die neue Figur entspricht ganz der Konstruktionsfigur für den vierten harmonischen Punkt. Durch Herumdrehen des durch B_1 gehenden Strahles um diesen Punkt kann man die Reihenfolge der neuen harmonischen Punkte beliebig ändern, nur bleibt die Zuordnung erhalten.

47) Das Gesagte gilt aber nicht nur für die Strahlen von P nach den harmonischen Punkten A, B, C, D, sondern auch für Strahlen, die von einem beliebigen Punkte P_1 der Ebene nach $ABCD$ gezogen werden. Bezeichnet man nämlich in der neuen Figur P_1A mit m_1 und zieht dazu eine Parallele E_2F_2 durch B, so muß $E_2B = BF_2 = n_1$ sein. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so könnte man zu A, B und C einen anderen vierten harmonischen Punkt D_1 konstruieren, indem man $BF_3 = n_1$ macht und PF_3 zieht. Dann wäre aber D gar nicht der vierte harmonische Punkt gewesen.

Strahlen, die von einem beliebigen Punkte aus nach vier harmonischen Punkten gezogen werden, nennt man harmonische Strahlen. Von ihnen gilt also folgendes:

Zieht man zu einem von vier harmonischen Strahlen eine Parallele, so halbiert der zugeordnete Strahl das zwischen den beiden anderen zugeordneten liegende Stück der Parallelen.

(**Aufgabe.** Zu drei harmonischen Strahlen den vierten zu konstruieren. Die Auflösung ergiebt sich durch Halbierung bezw. Verdoppelung einer Parallelen.)

Digitized by Google

Jede Gerade wird durch harmonische Strahlen in harmonischen Punkten geschnitten.

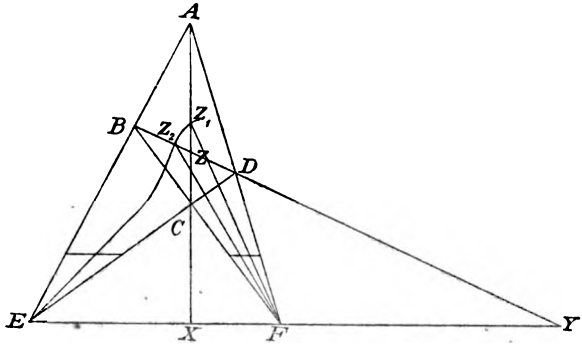
Parallel- und Centralprojektion harmonischer Punkte und Strahlen giebt stets wieder harmonische Punkte bezw. Strahlen.

Daß durch Halbierung eines Winkels und seines Nebenwinkels harmonische Strahlen entstehen, folgt aus Nr. 169 in Teil I.

48) Satz vom vollständigen Vierseit. Die Diagonalen des vollständigen Vierseits sind harmonisch geteilt.

Zweiter Beweis. $ABCDEF$ sei das vollständige Vierseit mit den Diagonalen AC, BD, EF, deren Schnittpunkte X, Y, Z sind.

Fig. 33.



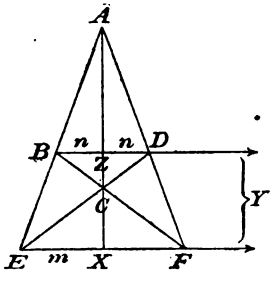
Man denke sich in E den vierten harmonischen Strahl konstruiert, der EF zugeordnet ist (z. B. durch Halbierung der Parallelen zu EF). Angenommen, dieser Strahl ginge nicht durch Z, sondern er schnitte die Diagonalen AC und BD in Z_1 bezw. Z_2, dann würden ACZ_1X harmonische Punkte und $F(ACZ_1X)$ harmonische Strahlen sein, und zwar würde FZ_1 die Parallele zu EF halbieren. Aber auch BDZ_2Y würden harmonische Punkte und $F(BDZ_2Y)$ harmonische Strahlen sein, und auch FZ_2 würde die Parallele zu EF halbieren. Diese Parallele würde also in zwei getrennten Punkten halbiert sein. Da dies nicht möglich ist, müssen Z_1 und Z_2 zusammenfallen, d. h. $ACZX$ und $BDZY$ sind harmonische Punkte. Dasselbe gilt von $EFXY$, denn diese Punkte sind als Projektionen der Punkte $BDZY$ von A aus zu betrachten.

49) **Dritter Beweis.** In Figur 34 ist $ABCDEF$ ein vollständiges Vierseit, welches symmetrisch gegen die Achse AX ist. BD

Digitized by Google

und EX sind parallel und durch die Symmetrieachse halbiert. Bezeichnet man den unendlich fernen Schnittpunkt der Parallelen mit Y, so sind $BDZY$ und $EFXY$ nach Nr. 45 harmonische Punkte. Dasselbe gilt von $XZCA$, denn wenn $EX = m$, $BZ = ZD = n$ gesetzt wird, so ist die Gerade XZ in C und A innerlich und äußerlich im Verhältnis $m : n$ geteilt.

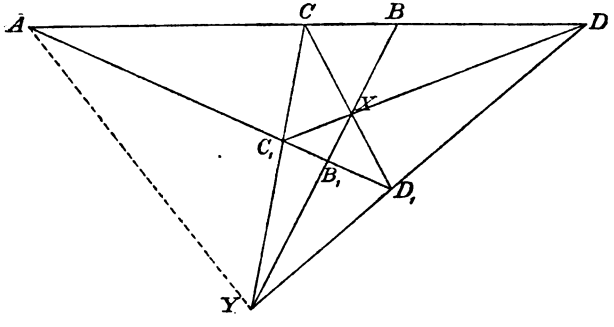
Fig. 34.



Durch Parallel- oder Centralprojektion kann man diese Figur auf eine beliebige Ebene übertragen, wobei die Symmetrie des vollständigen Vierseits im allgemeinen aufhört. Bei der letzteren Projektionsart hört auch der Parallelismus von BD und EF auf, so daß der Schnittpunkt Y ins Endliche fällt. Dann entsteht eine Figur nach Art von Figur 33. Bei der Projektion sind aber die drei harmonischen Punktgruppen harmonische Punkte geblieben. Demnach teilen sich die Diagonalen des vollständigen Vierseits harmonisch.

50) **Satz.** Gehen von einem Punkte A zwei Gruppen harmonischer Punkte $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ aus, und verbindet man die gleichnamigen, so schneiden sich die Verbindungslinien in **einem** Punkte Y. Verbindet man die zugeordneten Punkte über Kreuz, so schneiden sich diese Verbindungslinien mit der dritten ebenfalls in **einem**

Fig. 35.



Punkte X. Ist das Teilungs-Verhältnis bei der ersten Gruppe $m_1 : m_2$, bei der zweiten Gruppe $m_1 : m_3$, so ist die Verbindungslinie BB_1 im Verhältnis $m_2 : m_3$ harmonisch geteilt.

Digitized by Google

Beweis. In Figur 35 sind $ABCD$ und $AB_1C_1D_1$ die beiden von A ausgehenden harmonischen Punktgruppen. Die Verbindungslinien BB_1 und CC_1 schneiden sich in Y. Zieht man YD_1, so muß diese Gerade durch D gehen, weil sonst durch Projektion auf AD ein anderer harmonischer Punkt als D entstehen würde, was unmöglich ist. Also geht DD_1 auch durch Y.

Ebenso wird der Beweis mit CD_1, BB_1 und C_1D geführt.

Es handelt sich also in Figur 35 um ein vollständiges Vierseit $ACXC_1DD_1$, dessen Diagonale CC_1 durch AX und AY harmonisch geteilt ist, so daß auch BB_1 in X und Y harmonisch geteilt sein muß.

Um das Verhältnis der Teilung zu finden, fälle man von A, B und B_1 Lote e_1, e_2 und e_3 auf DY. Dann ist $\frac{AB}{BD} = \frac{e_1}{e_2}$ und $\frac{AD_1}{B_1D_1} = \frac{e_1}{e_3}$, oder nach obiger Annahme der Verhältnisse $\frac{m_1}{m_2} = \frac{e_1}{e_2}$, $\frac{m_1}{m_3} = \frac{e_1}{e_3}$. Daraus folgt aber durch Division $\frac{m_3}{m_2} = \frac{e_3}{e_2}$. Da aber $\frac{BY}{B_1Y} = \frac{e_2}{e_3}$ ist, so ist das Teilungsverhältnis von BB_1, wie behauptet war, $m_2 : m_3$.

Bemerkung. Schlägt man um A, B und B_1 Kreise, deren Radien in folgenden Verhältnissen stehen:

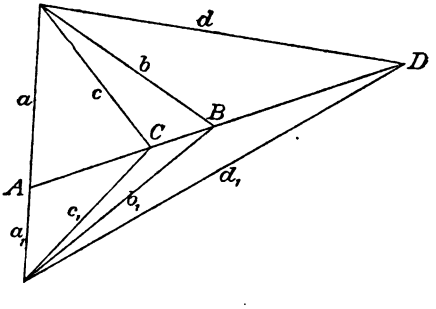
$$r_1 : r_2 = AC : CB = AD : BD;\quad r_1 : r_3 = AC_1 : C_1B_1 = AD_1 : B_1D_1,$$

so sind C und D, X und Y, C_1 und D_1 die Ähnlichkeitspunkte je zweier dieser Kreise. Der Satz, daß die Ähnlichkeitspunkte dreier Kreise in Gruppen zu dreien auf einer Geraden liegen, ist also eine unmittelbare Folge des Satzes vom vollständigen Vierseit, wie sich sofort aus der entsprechenden Figur 31 ergiebt. Statt der Kreise kann man auch ähnliche und ähnlich liegende Polygone, z. B. Dreiecke nehmen.

51) Ein dem vorigen entsprechender Satz ist folgender:

Haben zwei Gruppen harmonischer Strahlen einen gleichnamigen Strahl gemein, so schneiden sich die übrigen drei Strahlen in Punkten einer Geraden.

Fig. 36.



Beweis. $abcd$ und $a_1b_1c_1d_1$ in Fig. 36 seien die beiden harmonischen Strahlengruppen, bei denen a und a_1 in dieselbe Gerade fallen, während b und b_1 sich in B, c und c_1 in C schneiden. Zieht

Digitized by Google

man BC, was den Schnitt A giebt, so müssen sich die vierten Strahlen d und d_1 in einem Punkte D dieser Geraden schneiden, denn sonst würde der vierte harmonische Punkt zu A, B und C doppelt vorhanden sein.

52) Beide Sätze sind specielle Fälle von folgenden allgemeineren, die in entsprechender Weise bewiesen werden:

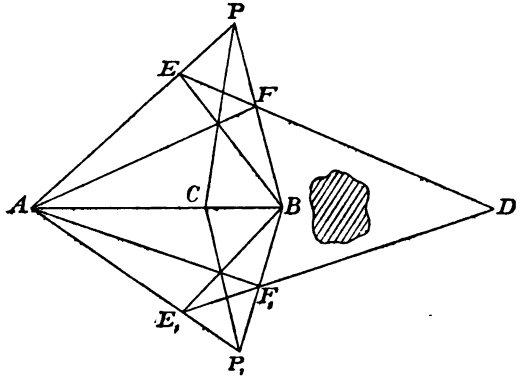
Gehen bei zwei Gruppen harmonischer Punkte die Verbindungslinien von drei gleichnamigen Paaren durch einen Punkt, so geht die vierte Verbindungslinie durch denselben Punkt.

Schneiden sich bei zwei Gruppen harmonischer Strahlen drei gleichnamige Paare in Punkten einer Geraden, so schneiden sich die vierten Strahlen in einem Punkte derselben Geraden.

53) **Aufgabe.** Eine gegebene Gerade mit dem Lineal allein über ein Hindernis hinaus zu verlängern.

Auflösung. In Figur 37 sei AB die gegebene Gerade. Die schattierte Fläche sei das unübersteigliche Hindernis. Man nehme auf AB rechts von der Mitte einen beliebigen Punkt C an. Mit Hülfe des Lineals allein läßt sich über und unter der Linie die Konstruktion des vierten harmonischen Punktes ausführen, denn die Geraden EF und E_1F_1 schneiden sich in diesem. D ist demnach ein Punkt der gesuchten Verlängerung. Wiederholt man die Konstruktion mit einem zweiten Punkte C_1 auf AB, so findet man einen zweiten Punkt D_1, u. s. w.

Fig. 37.



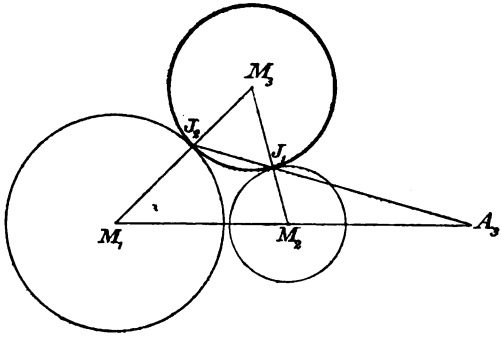
VII. Ähnlichkeitspunkte und Pascalscher Lehrsatz.

54) Werden zwei Kreise M_1 und M_2 von einem dritten gleichartig berührt (d. h. beide äußerlich oder beide innerlich), so geht die Verbindungslinie der Berührungspunkte durch den äußeren Ähnlichkeits-

Digitized by Google

punkt von M_1 und M_2. Bei ungleichartiger Berührung dagegen geht die Verbindungslinie durch den inneren Ähnlichkeitspunkt. Die Berührungspunkte sind nämlich bei äußerlicher Berührung innere, bei innerlicher Berührung äußere Ähnlichkeitspunkte, bilden also jedesmal mit A_3 bezw. J_3 eine gerade Linie.

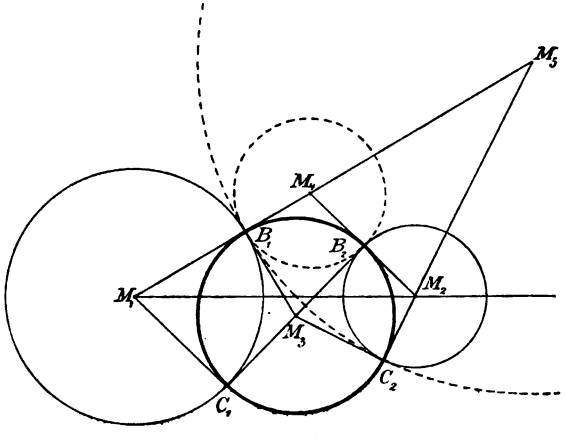
Fig. 38.



Aufgabe. Einen Kreis zu konstruieren, der zwei gegebene gleichartig (bzw. ungleichartig) berührt, und zwar einen davon in einem gegebenen Punkte. (Auflösung einfach.)

55) **Satz.** Werden zwei Kreise von einem dritten rechtwinklig geschnitten, so gehen die Verbindungslinien der Schnittpunkte des ersten Kreises mit denen des zweiten durch die Ähnlichkeitspunkte beider Kreise.

Fig. 39.



Beweis. In Figur 39 werden die Kreise M_1 und M_2 von dem Kreise M_3 in B_1, B_2, C_1, C_2 rechtwinklig geschnitten, so daß M_1B_1 und M_2B_2 Tangenten an M_3 sind, die sich in M_4 schneiden, wobei

Digitized by Google

zugleich M_4B_1 und M_4B_2 als Tangenten an M_3 einander gleich sind. M_4 ist also Mittelpunkt eines Kreises, der M_1 und M_2 in B_1 und B_2 gleichartig berührt, so daß B_1B_2 durch den äußeren Ähnlichkeitspunkt A von M_1 und M_2 gehen muß.

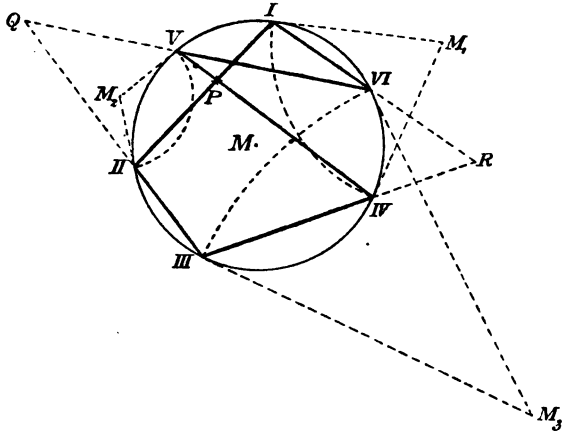
Ebenso schneiden sich M_1B_1 und M_2C_2 in M_5, letzterer Punkt ist Mittelpunkt eines Kreises, der M_1 und M_2 ungleichartig berührt, so daß die Gerade B_1C_2 durch I, den inneren Ähnlichkeitspunkt von M_1 und M_2 gehen muß.

Ebenso geht C_1C_2 durch A und C_1B_2 durch I. — Die Berührungskreise entscheiden darüber, ob der Schnittpunkt der äußere oder der innere Ähnlichkeitspunkt ist.

56) **Pascalscher Satz.** Die Gegenseiten des Sehnensechsecks schneiden sich in drei Punkten, die auf gerader Linie liegen.

Zweiter Beweis.*) In Figur 40 sei M der Kreis mit dem Sehnensechseck $I\,II\,III\,IV\,V\,VI$. Die Tangenten in den Gegenpunkten I und IV, II und V, III und VI geben die Mittelpunkte von Kreisen M_1, M_2 und M_3, die den Kreis M rechtwinklig schneiden.

Fig. 40.



Weil M_1 und M_2 von M rechtwinklig geschnitten werden, so müssen die Verbindungslinien der Schnittpunkte I und II, IV und V sich in einem Ähnlichkeitspunkte P der Kreise M_1 und M_2 schneiden.

Weil M_2 und M_3 von M rechtwinklig geschnitten werden, müssen

*) Der erste Beweis befindet sich auf Seite 35.

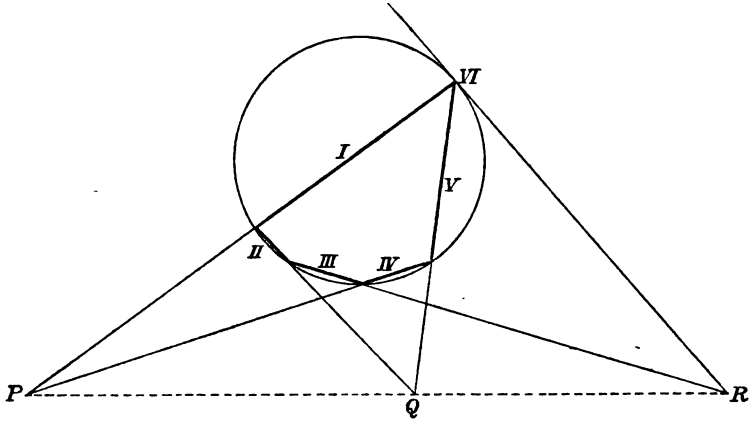
Digitized by Google

ebenso die Geraden *II III* und *VI V* durch einen Ähnlichkeitspunkt *Q* der Kreise M_1 und M_2 gehen.

Weil M_3 und M_1 von *M* rechtwinklig geschnitten werden, müssen ebenso *I VI* und *III IV* durch einen Ähnlichkeitspunkt *R* der Kreise M_3 und M_1 gehen. Untersucht man die Ähnlichkeitspunkte *P*, *Q*, *R* nach Art der Figur 39 mit Hülfe von Berührungskreisen, so ergiebt sich, daß es solche sind, die auf einer Geraden liegen.

57) **Folgerung.** Nennt man die Seiten des Sehnenfünfecks *I*, *II*, *III*, *IV*, *V*, so kann man es als ein Sechseck mit unendlich kleiner Seite *VI* betrachten, deren Verlängerung eine Tangente des

Fig. 41.



Kreises geben muß. Demnach schneiden sich die Fünfecksseiten *I* und *IV*, *II* und *V* und außerdem die Seite *III* und die Tangente *VI* in Punkten *P*, *Q*, *R* einer Geraden. (Fig. 41.)

Aufgabe. Die Tangenten in den Ecken eines gegebenen Kreissehnenfünfecks mit dem Lineal allein zu konstruieren.

Die Auflösung ergiebt sich aus Figur 41. Bemerkenswert ist, daß der Kreis gar nicht vorhanden zu sein braucht.

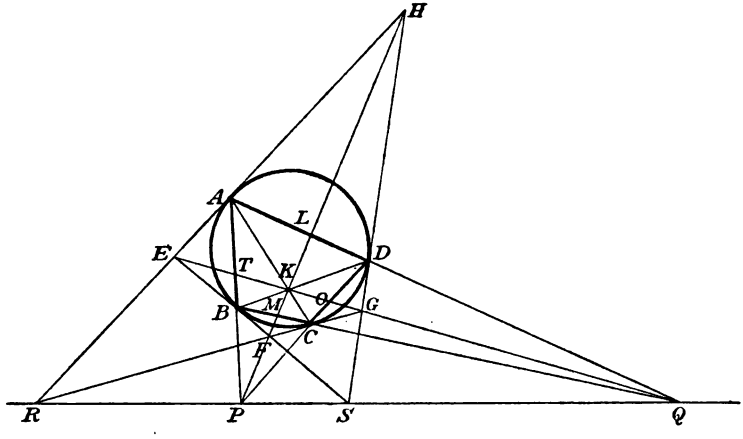
58) **Folgerung.** In ähnlicher Art läßt sich das Sehnenviereck im Kreise als Sechseck betrachten, jedoch in mehrfacher Weise.

In Figur 42 sei *ABCD* das Kreisviereck. Betrachtet man *A* und *C* als Doppelpunkte, so ist es ein Sechseck, und die Seiten *AB* und *CD*, *BC* und *AD* und die Tangenten in *A* und *C* schneiden sich in Punkten *P*, *Q* und *R* einer Geraden.

Digitized by Google

Betrachtet man B und D als Doppelpunkte, so schneiden sich AB und CD, BC und AD und die Tangenten in B und D in Punkten P, Q und S einer Geraden.

Fig. 42.



Denkt man sich das Viereck übers Kreuz gezeichnet, z. B. als $ACBD$, und betrachtet man A und B als Doppelpunkte, so schneiden sich die in A und B gezogenen Tangenten, die Geraden AC und BD, und die Geraden AD und BC in Punkten EKQ einer Geraden.

In demselben Viereck betrachte man C und D als Doppelpunkte, dann findet man ebenso, daß KGQ auf einer Geraden liegen.

Dieselbe Betrachtung am gekreuzten Viereck $ABDC$ führt darauf, daß die Punkte $HKFP$ einer Geraden angehören. Also gilt folgender Satz:

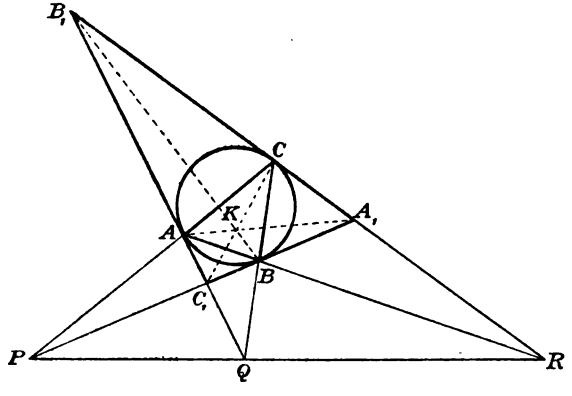
Satz. Die gegenüberliegenden Seiten des Sehnenvierecks im Kreise und des durch seine Ecken gelegten Tangentenvierecks schneiden sich paarweise in vier Punkten, die auf einer Geraden liegen. Die Diagonalen beider Vierecke schneiden sich sämtlich in einem Punkte, die des Tangentenvierecks gehen zugleich durch die Schnittpunkte der Gegenseiten des Sehnenvierecks.

Bemerkung. Betrachtet man in Figur 42 $EFGH$ als vollständiges Vierseit mit den Ergänzungsecken R und S, so ergeben sich P, Q, R, S, ebenso E, G, K, Q und H, F, K, P als harmonische Punktgruppen. Durch Projektion von H bezw. E, F, G aus liegen auch auf AQ, AP, BQ und DP harmonische Punktgruppen. Demnach sind auch die Diagonalen beider Vierecke harmonische Strahlen.

Digitized by Google

59) **Folgerung.** Betrachtet man die Ecken des Sehnendreiecks (Fig. 43) als Doppelpunkte, so schneidet sich nach dem Sechseckſatze jede Seite mit der Tangente des Gegenpunktes so, daß die Schnittpunkte P, Q, R auf einer Geraden liegen.

Fig. 43.



Da auch die Berührungstransversalen AA_1, BB_1 und CC_1 sich nach Nr. 38 in einem Punkte K schneiden, so ergiebt sich durch Projektion der Figur unter Weglassung des Kreises eine entsprechende, bei der jedoch nicht mehr der Um-Kreis von ABC zugleich der In-Kreis von A_1B_1C ist. Aus der neuen Figur aber erkennt man den

Satz: Zieht man in einem Dreieck von den Ecken aus Gerade durch einen Punkt bis zu den Gegenseiten, und verbindet man die Schnittpunkte auf den Gegenseiten mit einander, so schneiden die Seiten des neuen Dreiecks die entsprechenden des ursprünglichen in Punkten P, Q, R, die auf einer Geraden liegen.

Bemerkung. Der Beweis ergiebt sich ohne Projektion aus folgendem: Betrachtet man $AKBC_1$ als vollständiges Vierseit, so sind B_1, A_1, C, R harmonische Punkte. Ebenso giebt das Vierseit A_1CKB die harmonischen Punkte B_1, C_1, A, Q. Von B_1 gehen also zwei Gruppen harmonischer Punkte aus, so daß die Geraden CA, A_1C_1 und RQ sich in demselben Punkte P schneiden müssen.

60) **Bemerkung.** Bezeichnet man jede Parallel- und Centralprojektion des Kreises als einen Kegelschnitt, so geht die Pascalsche Figur am Kreise durch die Projektion in die entsprechende Pascalsche Figur am Kegelschnitte über. Da die Geraden dabei Gerade bleiben,

Digitized by Google

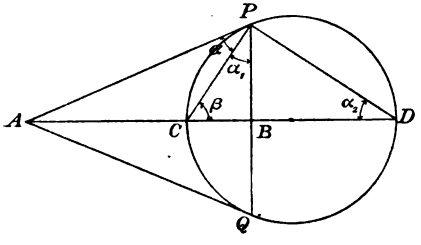
so gilt der Pascalsche Satz von jedem Kegelschnitte. Auf diese Bemerkung soll später zum Zweck der Ausführung wichtiger Konstruktionen zurückgegriffen werden.

VIII. Harmonische Punkte und Strahlen am Kreise.

(Pol und Polare.)

61) In Fig. 44 sind von A aus Tangenten AP und AQ an einen Kreis gezogen, so daß die Berührungssehne PQ senkrecht auf der durch den Mittelpunkt gelegten Sekante AD steht. Dabei ist, wenn man noch PC und PD zieht, $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha_2$ und $\sphericalangle \alpha_2 = \sphericalangle \alpha_1$ (warum beides?), so daß $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha_1$ ist. Da außerdem $\sphericalangle CBP = 90^0$ ist, so sind die von P ausgehenden Strahlen harmonische, also sind $ABCD$ harmonische Punkte. (Vgl. Teil I. Nr. 169.) Folglich gilt der Satz:

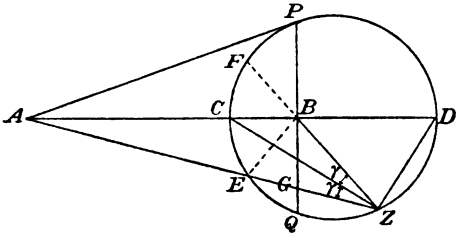
Fig. 44.



Satz. Die von einem Punkte außerhalb des Kreises durch seinen Mittelpunkt gelegte Sekante ist durch Kreis und Berührungslinie harmonisch geschnitten.

62) Verbindet man nun einen beliebigen Punkt Z der Peripherie mit den besprochenen Punkten $ABCD$, so sind $Z(ABCD)$ harmonische Strahlen. Weil aber die zugeordneten Strahlen CZ und DZ auf einander senkrecht stehen, so ist $\sphericalangle AZB$ halbiert, folglich $\frac{AZ}{BC} = \frac{AC}{BZ}$. Wo also auch der Punkt Z auf der Peripherie liege, stets ist das Verhältnis $\frac{AZ}{BZ}$ dasselbe. Bezeichnet man AZ jedesmal mit p, BZ mit q und das konstante Verhältnis mit c, so kann man abgekürzt sagen:

Fig. 45.



Digitized by Google

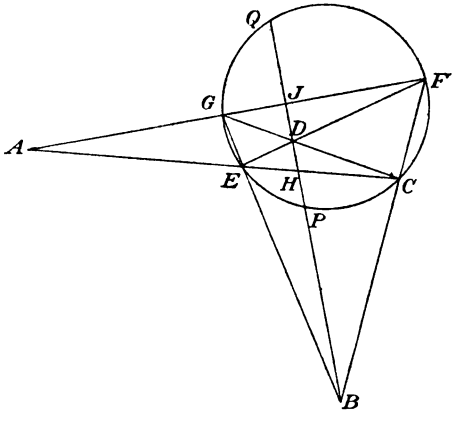
Der Kreis ist die Kurve konstanten Verhältnisses oder die Kurve $\frac{p}{q} = c$.

63) Aus $\gamma = \gamma_1$ folgt ferner $\overset{\frown}{EC} = \overset{\frown}{CF}$ (gleiche Peripheriewinkel, gleiche Bogen), also aus Gründen der Symmetrie gegen den Durchmesser $\sphericalangle CBF = \sphericalangle CBE$. Da ferner $PQ \perp CD$, so sind die von B ausgehenden Strahlen harmonisch, also $AGEZ$ harmonische Punkte. Folglich:

Satz. Jede Sekante durch A wird durch die zu A gehörige Berührungssehne harmonisch geteilt.

64) Zieht man von A aus beliebige Sekanten AF und AC, die den Kreis in G und E schneiden, und verbindet man die Schnittpunkte auf alle Arten, so entsteht ein vollständiges Vierseit $BCDEFG$, dessen Diagonalen harmonisch geteilt sind. Demnach sind $AJGF$ und $AHEC$ harmonische Punkte. Folglich muß die Berührungssehne von A durch H und J gehen, d. h. BD ist zugleich die Berührungssehne PQ. Demnach gilt der

Fig. 46.



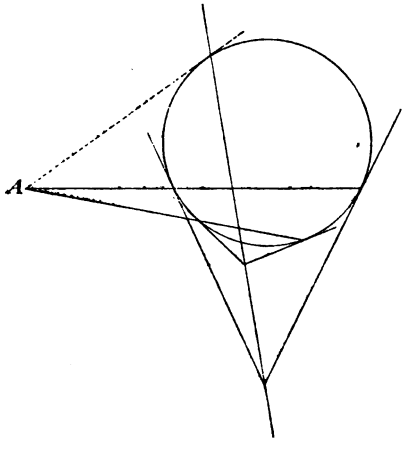
Satz. Zieht man von einem Punkte A außerhalb des Kreises zwei Sekanten, so schneiden sich die Verbindungslinien der Kreisschnittpunkte paarweise auf der Berührungssehne von A.

65) Legt man beide Sekanten unendlich nahe aneinander, so giebt das eine Paar von Verbindungslinien unendlich kurze Sehnen, deren Verlängerungen Tangenten sind. Auch diese müssen sich auf der Berührungssehne schneiden. Folglich:

Satz. Zieht man von einem Punkte A außerhalb des Kreises beliebig viele Sekanten, so liegen die Schnittpunkte aller zugehörigen Tangentenpaare auf einer geraden Linie, der Berührungssehne von A. (Fig. 47.)

Digitized by Google

Fig. 47.



Aufgabe. Von einem Punkte A außerhalb des Kreises an diesen mit dem Lineal allein Tangenten zu konstruieren.

Auflösung. Man ziehe zwei Sekanten AGF und AEC (Fig. 46). GC und EF geben einen Schnittpunkt D, GE und FC einen Schnittpunkt B. BD schneidet den Kreis in P und Q. AP und AQ sind die gesuchten Tangenten.

66) Sind in Fig. 48 $ABCD$ dieselben harmonischen Punkte wie vorher, und ist KL das Lot im Punkte A auf AD, so spielt KL in Bezug auf B dieselbe Rolle, wie vorher PQ in Bezug auf A. Insbesondere wird jede durch B gelegte Sekante durch den Kreis und KL harmonisch geteilt.

Fig. 48.

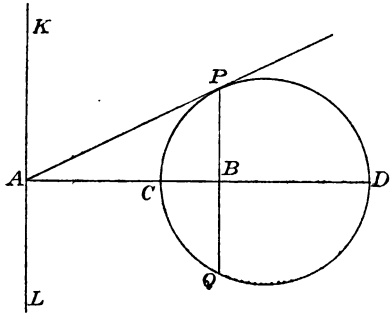
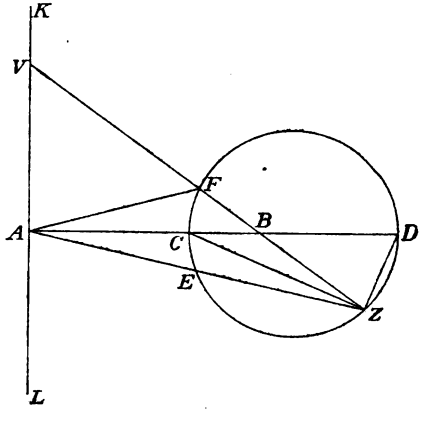


Fig. 49.



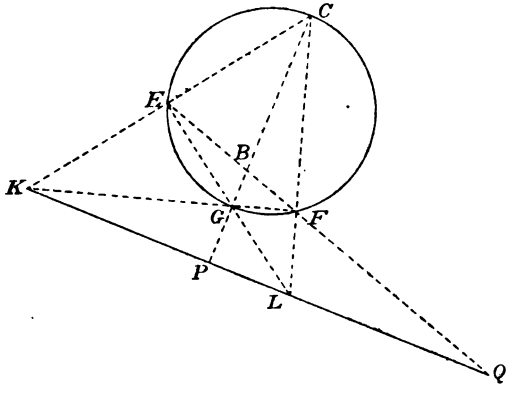
Ist z. B. $ZBFV$ in Fig. 49 die willkürliche Sekante, und zieht man von Z aus nach $ABCD$ Gerade, so ist, wie vorher, der Peripheriewinkel BZE halbiert, folglich $\overset{\frown}{EC} = \overset{\frown}{CF}$, folglich, wenn man AF zieht, $\sphericalangle FAE$ aus Symmetriegründen halbiert. Da außerdem $KL \perp AD$,

Digitized by Google

so sind die von A ausgehenden Strahlen harmonische, folglich auch $VBFZ$ harmonische Punkte.

67) Zieht man durch einen innerhalb des Kreises liegenden Punkt B beliebige Sehnen, und verbindet man ihre Schnittpunkte auf alle Arten, so erhält man Schnittpunkte K und L außerhalb des Kreises. Im vollständigen Vierseit $CEGFKL$ ist die Diagonale GC harmonisch geteilt, ebenso EF. Weil aber $CGBP$ und $EFBQ$ harmonische Punkte sind, so muß KL die Linie sein, die man erhält, wenn man auf dem durch B gelegten Durchmesser im vierten harmonischen Punkte A ein Lot errichtet.

Fig. 50.



Legt man die Sekanten durch B unendlich nahe, so erhält man, wie oben, in den Endpunkten Tangenten, die sich auf KL schneiden.

68) Nennt man nun einen Punkt P, mag derselbe innerhalb oder außerhalb des Kreises liegen, einen Pol, und bezeichnet man das auf dem durch P gehenden Durchmesser im zugeordneten harmonischen Punkte errichtete Lot als Polare, so kann man die obigen beiden Gruppen von Sätzen und Aufgaben einheitlich in folgende zusammenfassen:

Jede durch den Pol gehende Sekante wird durch Kreis und Polare in harmonischen Punkten geschnitten.

Zieht man durch den Pol zwei Sekanten, und verbindet man ihre Schnittpunkte auf alle Art, so schneiden sich die Verbindungslinien paarweise auf der Polare.

Darauf beruht die Konstruktion der Polare zu einem gegebenen Pole mit dem Lineal allein.

Zieht man durch den Pol beliebige Sekanten, so liegen die Schnittpunkte zusammengehöriger Tangenten auf der Polare.

Nun ist aber der Schnittpunkt jedes Tangentenpaares der Pol

Digitized by Google

zur Berührungssehne desselben Paares, die nun als Polare zu betrachten ist. Folglich:

Dreht sich die Polare um einen festen Punkt, so bewegt sich der Pol auf einer Geraden, der Polare des festen Punktes.

Bewegt sich ein Punkt auf einer festen Geraden, so dreht sich seine Polare um einen festen Punkt, den Pol der Geraden.

Liegen also drei Punkte auf einer Geraden, so schneiden sich ihre drei Polaren in einem Punkte. Gehen drei Gerade durch einen Punkt, so liegen ihre drei Pole auf einer Geraden.

Der Schnittpunkt R zweier Polaren p und q ist der Pol der Verbindungslinie r der zugehörigen Pole P und Q, und umgekehrt.

69) **Aufgabe.** Den Pol einer Geraden mit dem Lineal allein zu konstruieren.

Auflösung. Man konstruiere die Polaren p und q zu zwei beliebigen Punkten P und Q der Geraden. Der Schnitt von p und q ist der gesuchte Pol.

Zu jedem aus Punkten und Geraden bestehenden Gebilde kann man also mit Hülfe eines Kreises ein anderes Gebilde konstruieren, indem man zu jedem Punkte die zugehörige Polare, zu jeder Geraden den zugehörigen Pol bestimmt. Man nennt dieses neue Gebilde die Polarfigur des gegebenen Gebildes (oder auch die reciproke Figur).

[Da jedem Punkte außerhalb des Kreises eine den Kreis schneidende Polare entspricht, jedem innerhalb gelegenen eine den Kreis nicht schneidende Polare, so gilt als Zwischenfall der eines auf dem Kreise liegenden Punktes, dessen Polare den Kreis weder schneidet noch gar nicht trifft, d. h. die Tangente im Punkte selbst. Der Mittelpunkt des Kreises hat seine Polare in unendlicher Entfernung. (Eigentlich müßte man ihn als unendlich kleinen Kreis betrachten und ihm unendlich viele Polaren zuschreiben, die in unendlicher Entfernung liegen.) Ebenso hat jeder Durchmesser seinen Pol in unendlicher Entfernung, aber auf dem senkrecht auf dem ersteren stehenden Durchmesser.]

Aus den Eigenschaften jeder Figur kann man Schlüsse auf die Polarfigur ziehen. Aus gewissen Sätzen über Punkte auf einer Geraden kann man solche über Gerade durch einen Punkt (und umgekehrt) ableiten.

70) [Eine merkwürdige Beziehung ergiebt sich, wenn man zur Figur des vollständigen Vierseits mit seinen harmonischen Punkten

Digitized by Google

und Strahlen die reciproke Figur bildet. Den 9 Punkten *ABCDEFXYZ* in Fig. 51 entsprechen 9 Gerade *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *x*, *y*, *z* in Fig. 52; den Geraden 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 entsprechen Punkte *I*, *II*, *III*, *IV*, *V*, *VI*, *VII*, *VIII*. In der Urfigur sind 1, 4, 5, 7 harmonische Strahlen, in der Polarfigur entsprechen diesen die Punkte *I*, *IV*, *V*, *VII*, die harmonische sind, weil es sich um das Viereck *II VI III VIII* mit den Ergänzungsecken *I* und *IV* handelt.

Fig. 51.

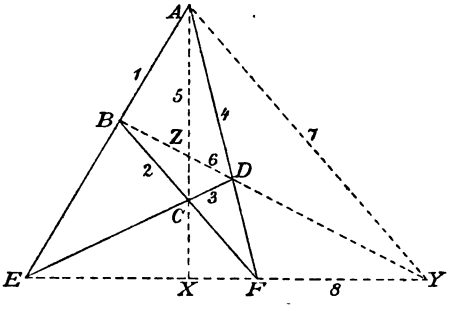
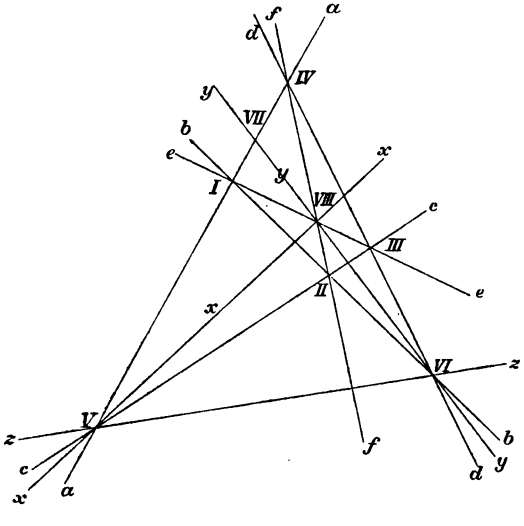


Fig. 52.



Folglich gilt ganz allgemein der Satz: Harmonischen Strahlen entsprechen in der Polarfigur stets harmonische Punkte; harmonischen Punkten der ersteren entsprechen harmonische Strahlen der anderen.]

71) **Satz des Brianchon.** Die Verbindungslinien der Gegenecken des Tangentensechsseits schneiden sich in **einem** Punkte.

Beweis. Die Polarfigur z. B. *I II III IV V VI* in Bezug auf den einbeschriebenen Kreis (Fig. 53) ist das Sechseck der Berührungspunkte mit den Seiten 1, 2, 3, 4, 5, 6. Die Gegenseiten 1 und 4, 2 und 5, 3 und 6 des letzteren schneiden sich nach Pascal in drei Punkten *P*, *Q* und *R*, die auf einer Geraden liegen. Dem Schnittpunkte von 1 und 4 entspricht aber als Polare die Verbindungslinie

Digitized by Google

von *I* und *IV*, dasselbe gilt von 2 und 5 bezw. *II* und *V*, dasselbe von 3 und 6 bezw. *III* und *VI*. Da aber *P*, *Q* und *R* auf einer Geraden liegen, so müssen ihre Polaren $\overline{I\,IV}$, $\overline{II\,V}$, $\overline{III\,VI}$ sich in einem Punkte, dem Pole dieser Geraden schneiden.

Fig. 53.

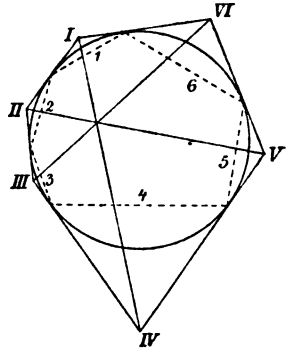
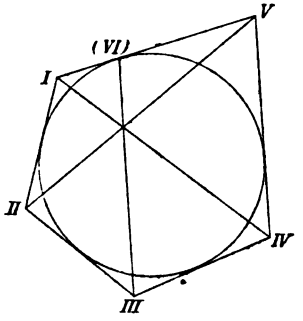


Fig. 54.



72) **Bemerkungen.** Der Satz gilt auch vom Tangentensechsseit mit sich schneidenden Tangenten. Mit dem Brianchon-Satze lassen sich dieselben Specialisierungen vornehmen, wie mit dem Pascalschen.

Betrachtet man z. B. in Fig. 54 am Fünfseit *I II III IV V* die Gerade $\overline{I\,V}$ als Doppellinie, so daß der Berührungspunkt (*VI*) der letzten Seite als Eckpunkt *VI* eines Tangentensechsecks betrachtet wird, welches dort einen Winkel von 180^0 hat, so schneiden sich *I IV*, *II V* und *III VI* auf einer Geraden. Der darin liegende Satz läßt sich leicht in Worten ausdrücken.

73) **Aufgabe.** Bei einem gegebenen Kreis-Tangentenfünfseit sollen die Berührungspunkte des nicht gezeichneten Kreises mit dem Lineal allein konstruiert werden.

Bemerkung. Sieht man das Tangentenviereit und Tangentendreieit am Kreise als Specialisierungen des Sechsseits an, so ergeben sich die früheren Figuren und Sätze, jedoch von einem neuen Gesichtspunkte aus betrachtet.

Die außerordentliche Bedeutung der Lehre von den reciproken Polaren und des Pascalschen und Brianchonschen Satzes beruht darin, daß beide bei der Projektion erhalten bleiben, obwohl der Kreis dabei in einem Kegelschnitt übergeht. Daraus werden sich später anderweitige Sätze und eine Fülle von Konstruktionen ergeben.

Digitized by Google

74) **Bemerkung.** Aus der ersten Figur dieses Kapitels ergiebt sich noch eine merkwürdige Beziehung. In der Proportion

$$AC : CB = AD : BD$$

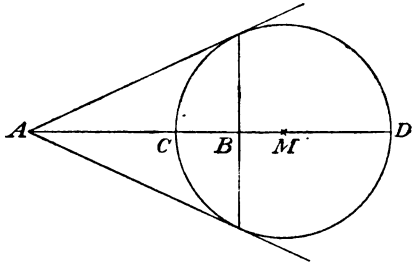
setze man

$$AC = AM - r,$$
$$AD = AM + r,$$
$$CB = r - BM,$$
$$BD = BM + r,$$

so daß man erhält:

$$(AM - r) : (r - BM) = (AM + r) : (BM + r).$$

Fig. 56.



Die Produkte der inneren und äußeren Glieder sind gleich, und aus der entsprechenden Gleichung folgt $AM \cdot BM = r^2$, oder auch $MA \cdot MB = r^2$.

Nimmt man den Radius des Kreises als Längeneinheit an, so hat man $MA \cdot MB = 1$, also

$$MA = \frac{1}{MB} \quad \text{und} \quad MB = \frac{1}{MA}.$$

Jedem Punkte A außerhalb des Kreises entspricht also ein innerhalb des Kreises gelegener B, dessen „Radius" den umgekehrten Wert hat, und umgekehrt entspricht jedem inneren Punkte ein äußerer nach demselben Gesetze. Der zweite Punkt liegt jedesmal auf der Polare des ersten und auf seinem Durchmesser. Er ist also leicht zu konstruieren.

Dieses Abbildungsprinzip bezeichnet man als die Abbildung oder Spiegelung mittels reciproker Radien. Es trägt auch den Namen der Inversion. Den Mittelpunkt des spiegelnden Kreises nennt man das Centrum der Inversion. Einige Sätze darüber sollen in Folgendem*) abgeleitet werden.

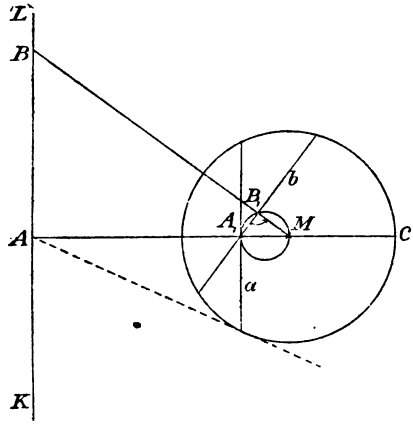
*) Kapitel IX und X und die sich anschließenden Berührungsaufgaben und kartographischen Betrachtungen können am Gymnasium selbstverständlich überschlagen werden. Es handelt sich aber dabei um einen Übungsstoff so anregender Art, daß der Versuch, durch ihn eine Reihe veralteter und geisttötender Konstruktionsaufgaben zu ersetzen, dringend anzuraten ist, besonders auch im Hinblick auf die mathematische Geographie und Kartographie.

Digitized by Google

IX. Die Inversion oder Spiegelung*) mittels reciproker Radien.

75) In Fig. 56 sei M ein Kreis mit Radius $MC = 1$, KL eine beliebige Gerade, A_1 ihr Pol, also nach 74) $MA_1 = \frac{1}{MA}$.

Fig. 56.



Die Polare b jedes Punktes B auf der Geraden geht durch A_1. Dabei ist $b \perp BM$, folglich liegt B_1, das reciproke Bild von B, auf einem Kreise, der MA_1 zum Durchmesser hat. Der unendlich ferne Bereich der Geraden KL entspricht dem Punkte M, denn $\frac{1}{\infty} = 0$. Also: Das reciproke Bild jeder Geraden in Bezug auf einen Kreis ist ein Kreis, der durch den Mittelpunkt M des spiegelnden Kreises geht, während sein Durchmesser auf dem von M auf die Gerade gefällten Lote liegt und zur Länge den reciproken (umgekehrten) Wert dieses Lotes hat.

Liegt die Gerade ganz außerhalb des spiegelnden Kreises, so liegt das Inversionsbild ganz innerhalb desselben. Schneidet sie den Kreis, so geht der entsprechende Kreis durch dieselben Schnittpunkte. Berührt die Gerade den spiegelnden Kreis, so berührt der Bildkreis in demselben Punkte. Geht die Gerade durch M, so entspricht sie sich selbst, so daß der innere Teil das Bild des äußeren ist.

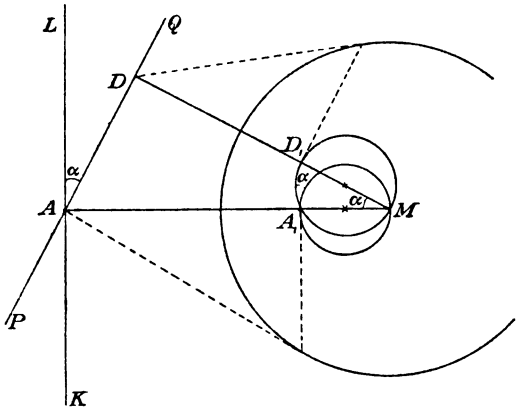
76) Schneiden sich in A zwei Gerade KL und PQ unter einem Winkel α, so entsprechen ihnen bei dieser Abbildung zwei Kreise durch

*) Der Name Spiegelung empfiehlt sich aus physikalischen Gründen. Man vergleiche die isothermische Spiegelung und die Methode der elektrischen Bilder. Mit der optischen Spiegelung hat allerdings die reciproke Spiegelung nichts zu thun, sie entspricht aber ganz der optischen Spiegelung gegen die Gerade was sich sofort zeigen wird.

Digitized by Google

A_1 und M, die sich dort unter demselben Winkel α schneiden, weil auch ihre Durchmesser bei M diesen Winkel bilden. Weil die Winkel der Geraden durch A und die der entsprechenden Kreise durch A_1 gleich sind, nennt man diese Art von Abbildung eine winkeltreue (isogonale).

Fig. 57.

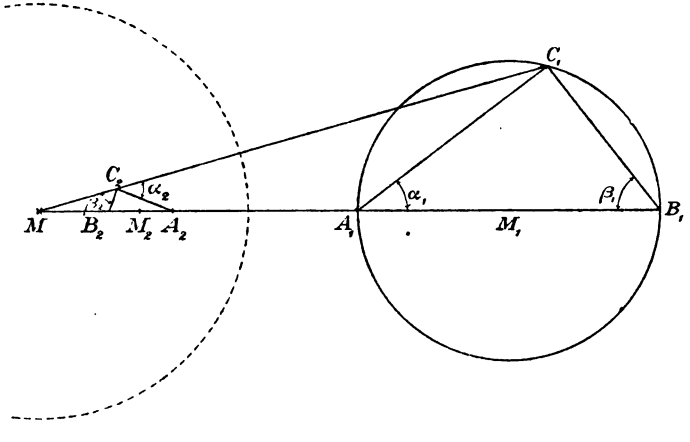


Dem Strahlenbüschel durch A entspricht das Kreisbüschel durch A_1 und M. Die sich entsprechenden Winkel stimmen überein.

77) **Aufgabe.** Was entspricht bei der reciproken Spiegelung einem beliebigen Kreise der Ebene?

Auflösung. In Fig. 58 sei M der spiegelnde Kreis mit Radius 1, M_1 der gespiegelte mit Radius r_1. Man ziehe die Centrale MM_1

Fig. 58.



bis B_1 und durch M die beliebige Sekante MC_1, worauf man C_1 mit A_1 und B_1 verbinde. Man bilde die reciproken Bilder A_2, B_2, C_2 von A_1, B_1 und C_1 und verbinde C_2 mit A_2 und B_2. Da $MA_1 \cdot MA_2$

Digitized by Google

$= MB_1 \cdot MB_2 = MC_1 \cdot MC_2 = 1$ ist, so sind die Dreiecke MA_2C_2 und MA_1C_1, ebenso MB_2C_2 und MB_1C_1, die sämtlich den Winkel M enthalten, einander ähnlich, so daß die Winkel β_1 und β_2, ebenso die Außenwinkel α_1 und α_2 gleich sind. Demnach ist auch $180^0 - (\alpha_2 + \beta_2) = 180^0 - (\alpha_1 + \beta_1)$, d. h. $\sphericalangle A_2C_2B_2 = \sphericalangle A_1C_1B_1$. Da aber letzterer gleich 90^0 ist, so ist $\sphericalangle A_2C_2B_2$ ein Rechter. Ist also der Kreis M_1 der geometrische Ort von C_1, so ist der geometrische Ort von C_2 der Kreis mit dem Durchmesser A_2B_2.

Aus $MA_1 \cdot MA_2 = MB_1 \cdot MB_2$

folgt ferner $MA_2 : MB_2 = MB_1 : MA_1$,

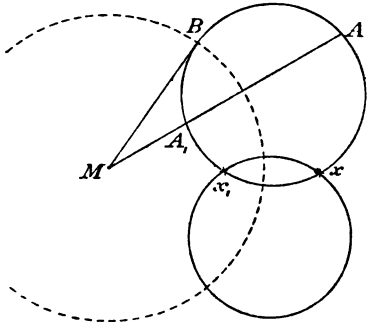
oder $(MM_2 + r_2) : (MM_2 - r_2) = (MM_1 + r_1) : (MM_1 - r_1)$,

eine Proportion, die aus $MM_2 : r_2 = MM_1 : r_1$ oder $MM_2 : MM_1 = r_2 : r_1$ abgeleitet ist. Der Punkt M teilt also die Gerade M_1M_2 äußerlich im Verhältnis $r_1 : r_2$, M ist also der äußere Ähnlichkeitspunkt der sich entsprechenden Kreise M_1 und M_2. Folglich:

Jeder Kreis geht durch Inversion in einen anderen Kreis über, und zwar ist das Inversionscentrum äußerer Ähnlichkeitspunkt der sich entsprechenden Kreise.

78) Liegt der abzubildende Kreis ganz außerhalb des Inversionskreises, so fällt sein Bild ganz innerhalb desselben. Umschließt er ihn, so wird das Bild vom Inversionskreise umschlossen. Koncentrischer Kreis giebt koncentrischen Kreis. Schneidet der Kreis den Inversionskreis, so schneidet der Bildkreis diesen in denselben Punkten und unter gleichen, aber entgegengesetzten Winkeln, wie aus dem Bilde der Tangenten im Schnittpunkte folgt. Berührt der erstere Kreis, so berührt auch der letztere. Geht der erstere durch das Inversionscentrum, so wird das Bild eine Gerade.

Fig. 59.



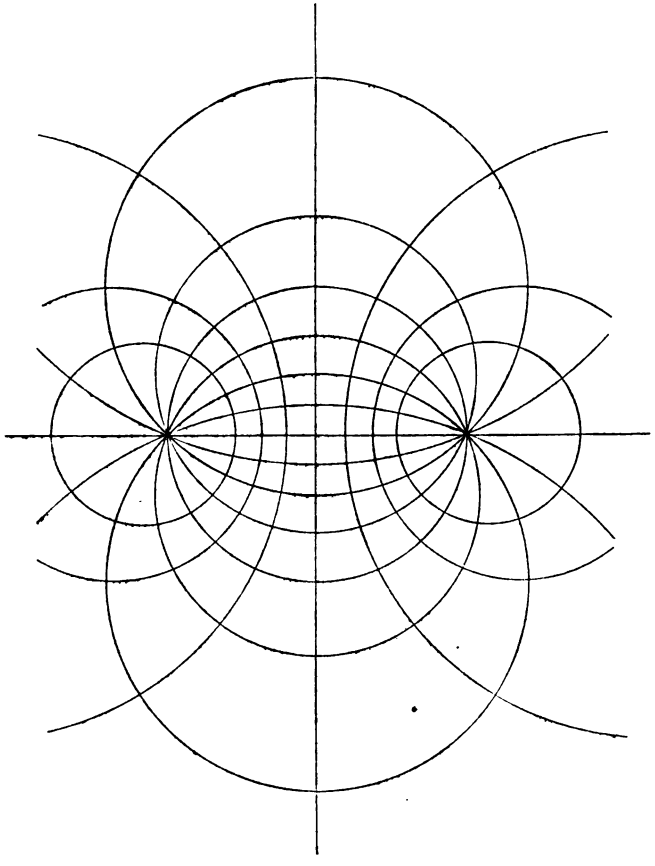
Schneidet der abzubildende Kreis den Inversionskreis rechtwinklig (orthogonal), so entspricht der erstere sich selbst. In Fig. 59 ist nämlich für die beliebige Sekante MA $MA_1 = \frac{1}{MA}$, da $MA_1 \cdot MA = MB^2 = 1^2 = 1$ ist. Beide Kreise können ihre Rolle vertauschen. Jeder

Digitized by Google

Durchmesser des einen ist infolge der Polarenbeziehung durch den anderen harmonisch geteilt. — Wird der Inversionskreis M von zwei anderen rechtwinklig geschnitten, und schneiden sich diese beiden in einem Punkte X, so schneiden sie sich auch in dem zu A reciproken Punkte X_1. Alle Kreise durch X und X_1 schneiden den Inversionskreis rechtwinklig. Die Tangenten von M an die Kreise durch X und X_1 sind also sämtlich gleich.

79) Werden zwei sich schneidende Kreise durch einen Inversionskreis abgebildet, so schneiden sich die Bildkreise unter demselben Winkel,

Fig. 60.



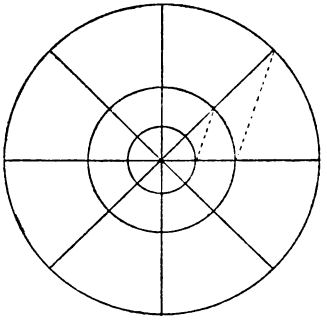
denn die Bilder der Tangenten im Schnittpunkte behalten den Winkel bei. Folglich:

Digitized by Google

Hat man ein Kreisbüschel durch zwei Punkte und die zugehörige orthogonale Kreisschar, und macht man irgend einen der Büschelkreise zum Inversionskreise, so geht jeder Büschelkreis in den Büschelkreis über, der den Inversionskreis unter dem entgegengesetzten Winkel schneidet, und jeder Kreis der Schar geht in sich selbst über. In diesem Sinne ist die Gesamtfigur zu sich selbst reciprok. Macht man einen der Kreise der Schar zum Inversionscentrum, so entspricht jeder Büschelkreis sich selbst, und jeder Kreis der Schar geht in einen anderen der Schar so über, daß das Inversionscentrum äußerer Ähnlichkeitspunkt für je zwei sich entsprechende Kreise ist.

80) Macht man einen der Büschelpunkte zum Inversionscentrum, so geht durch reciproke Spiegelung das Kreisbüschel nebst der zugehörigen Kreisschar in ein Strahlenbüschel mit der zugehörigen koncentrischen Kreisschar über.

Fig. 61.



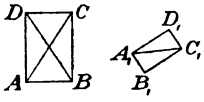
Zwischen diesen beiden Figuren bestehen interessante Beziehungen*). Der Symmetrie (oder wirklichen Spiegelung) gegen jeden Strahl des Strahlenbüschels entspricht die reciproke Spiegelung gegen den entsprechenden der Büschelkreise. Sind für einen der koncentrischen Kreise die beiden benachbarten Kreise zu einander reciprok, so findet dasselbe für die Kreise der Schar statt. Folgen die Strahlen des Strahlenbüschels unter gleichen Winkeln aufeinander, so findet dasselbe für die einzelnen Büschelkreise statt. Dem Mittelpunkte der koncentrischen Kreisschar entspricht nicht der Mittelpunkt eines der abgebildeten Kreise, sondern der Schnittpunkt des Kreisbüschels, der für jeden der Schar excentrisch liegt.

81) Folgen die einzelnen Individua beider Curvenscharen sehr dicht aufeinander, so entspricht jedem kleinen „Rechteck" der einen Figur ein ähnliches kleines „Rechteck" in der anderen. Betrachtet man

*) Fig. 60 ist auch in Bezug auf physikalische Verhältnisse von Wichtigkeit, z. B. läßt man in einem der Büschelpunkte einen elektrischen Strom in eine große Metallplatte eintreten, im anderen austreten, so geben die Büschelkreise die Stromlinien an, während jeder der anderen Kreise die Punkte gleicher elektrischer Spannung angiebt.

Digitized by Google

Fig. 62.



nämlich die Begrenzungen der kleinen Rechtecke und ihre Diagonalen als gerade Linien, so sind wegen der Winkeltreue die kleinen Dreiecke, also auch die Rechtecke, ähnliche Figuren. Sind die kleinen Rechtecke der Fig. 61 unter einander ähnlich, so gilt es auch von Fig. 60. Darf man sie z. B. in der einen als kleine Quadrate*) betrachten, so ist dies auch in der anderen der Fall. [Beide Zeichnungen sind also in den kleinsten Teilen ähnlich, während bei größeren Teilen die Ähnlichkeit aufhört. Diese „Konformität" ist eine Folge der Winkeltreue.]

82) Auch anderen Kreisen der Fig. 60 entsprechen Kreise der Fig. 61. Zeichnet man z. B. zwischen zwei koncentrischen Kreisen der Fig. 63a eine Reihe von Berührungskreisen, so liegen ihre

Fig. 63a.

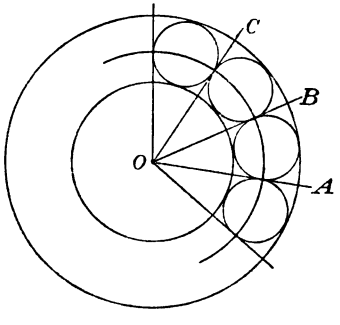
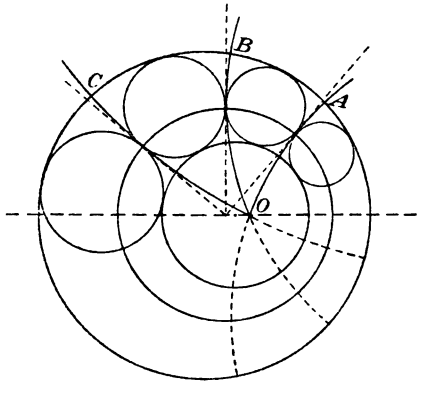


Fig. 63b.



gegenseitigen Berührungspunkte auf einem Kreise, der der Inversionskreis für die gesamte neue Figur ist. Macht man also dasselbe bei

*) Folgen die Strahlen in Fig. 61 unter dem Winkel $\frac{2\pi}{n}$ aufeinander, so darf man die kleinen Rechtecke als Quadrate betrachten, sobald die Radien benachbarter koncentrischer Kreise im Verhältnis $1 : e^{\frac{2\pi}{n}}$ stehen, wo $e = 2{,}7182818\ldots$ die Basis der natürlichen Logarithmen ist. Ist dieses Verhältnis berechnet und ein einziges Mal konstruiert, so ergiebt sich das gesamte Netz von Quadraten durch einfache Ähnlichkeitskonstruktion, denn jeder Radius ist die mittlere Proportionale zwischen zwei benachbarten. Den elementaren Beweis für diese wichtige Beziehung, die den Zusammenhang zwischen der Mercatorkarte und der Polarkarte nach Hipparch-Ptolemäus ergiebt, findet man anhangsweise am Schlusse des Buches.

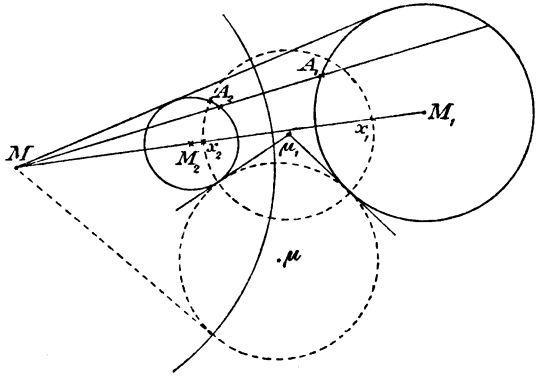
Digitized by Google

zwei nichtkoncentrischen Kreisen der Fig. 63b, so liegen auch jetzt die Berührungspunkte auf dem Inversionskreise. Dem Tangentenbüschel in Fig. 63a entspricht das berührende Kreisbüschel in Fig. 63b, den konstanten Winkeln des einen entsprechen konstante Winkel beim anderen. (Auch die gemeinschaftlichen Tangenten gehen durch einen Punkt, ohne jedoch gleiche Winkel zu bilden.) Schließt in Fig. 63a die gezeichnete Kreisreihe nach einem Umgange, so schließt sie jedesmal, wenn man auch anders anfängt. Dasselbe gilt auch von der nichtkoncentrischen Fig. 63b, was auf anderem Wege nur schwer zu beweisen ist. Jeder andere Kreis der Schar, der die Kreisreihe schneidet, schneidet sämtliche Berührungskreise unter konstantem Winkel. (Die entsprechenden Sätze über die Berührungskreise zwischen zwei Büschelkreisen werden dem Schüler überlassen.)

83) **Aufgabe.** Zu zwei sich nicht schneidenden Kreisen denjenigen Inversionskreis zu finden, der den einen in den anderen verwandelt.

Auflösung. Man suche zu den beiden Kreisen M_1 und M_2 den äußeren Ähnlichkeitspunkt M. Durch M lege man eine beliebige Sekante, die zwei Schnittpunkte A_1 und A_2 giebt, welche nicht zu parallelen Radien der beiden gegebenen Kreise gehören. Der Radius des gesuchten Inversionskreises M ist mittlere Proportionale zwischen MA_1 und MA_2. (Dasselbe gilt von den beiden anderen Schnittpunkten der Sekanten.)

Fig. 64.



Bemerkung. Der Inversionsradius ist zugleich die Länge der Tangente von M aus an jeden Kreis μ, der die beiden gegebenen gleichartig berührt; ebenso an jeden Kreis μ_1, der die beiden gegebenen rechtwinklig schneidet.

84) **Aufgabe.** Zu zwei sich schneidenden Kreisen den Inversionskreis zu konstruieren, der den einen in den anderen verwandelt.

Digitized by Google

Auflösung. Man konstruiere denjenigen durch die beiden Schnittpunkte gehenden Kreis, der den dortigen äußeren Schnittwinkel halbiert. Oder:

Man schlage um den äußeren Ähnlichkeitspunkt beider den durch die Schnittpunkte gehenden Kreis.

Bemerkung. Hat man einen Kreis in einen anderen verwandelt, so entspricht das Innere des einen entweder dem Inneren oder dem Äußeren des anderen. Macht man ihn selbst zu einem neuen Inversionscentrum, so verwandelt sich sein Inneres in sein Äußeres, und die vorigen Beziehungen wechseln.

85) **Aufgabe.** Zu zwei sich nicht schneidenden Kreisen einen Inversionskreis zu finden, der beide in koncentrische Kreise verwandelt.

Auflösung. Man ziehe durch den äußeren Ähnlichkeitspunkt eine Sekante, die in Punkten A_1 und A_2 schneidet, die nicht zu parallelen Radien gehören. Die Tangenten in diesen Punkten geben nach 55) den Radius eines rechtwinklig schneidenden Kreises. Dieser schneidet die Centrale in den Büschelpunkten X_1 und X_2 des orthogonalen Kreisbüschels. Macht man einen dieser Punkte zum Inversionscentrum, so entstehen aus den beiden gegebenen Kreisen koncentrische Kreise.

86) **Bemerkung.** Die besprochene Inversion beruhte auf der Beziehung $AX_1 \cdot AX_2 = 1$. Man kann auch $AX_1 \cdot AX_2 = -1$ setzen, dann liegen X_1 und X_2 auf verschiedenen Seiten von A. Daraus ergeben sich entsprechende Kreisbeziehungen, wie vorher, jedoch tritt stets der innere Ähnlichkeitspunkt an Stelle des äußeren. Wesentlich neues ergiebt sich dabei nicht. Es handelt sich nur um die frühere Inversion verbunden mit Umklappungen um zwei aufeinander senkrechte durch das Inversionscentrum gehende Achsen, so daß man die Operation als die negative Inversion bezeichnen kann. (Jede Strecke der Inversionszeichnung wird in die entgegengesetzte verwandelt.)

X. Potenz und Potenzlinien.

87) Liegt ein Punkt P außerhalb des Kreises, so ist für jede von ihm ausgehende Sekante $PA \cdot PB = t^2$, also eine konstante positive Größe, nämlich das Quadrat der von P aus gezogenen Tangente (Fig. 65).

Liegt er dagegen innerhalb, so ist für jede durch ihn gehende Sehne $PA \cdot PB = -s^2$, wo s die Hälfte der kleinsten durch P

Digitized by Google

gehenden Sehne ist (die durch P halbiert wird). Das negative Zeichen ist deshalb genommen, weil PA und PB Strecken von entgegen-

Fig. 65.

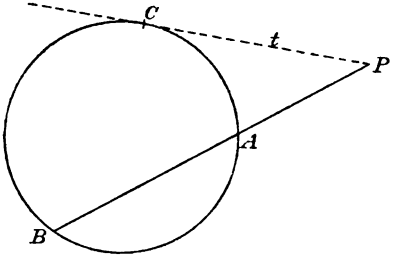
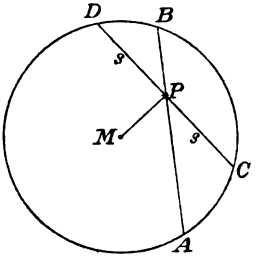


Fig. 66.

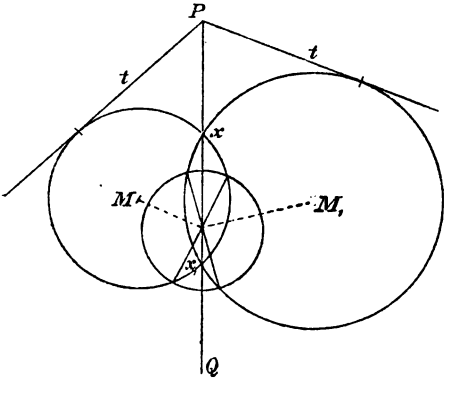


gesetzter Richtung sind, während beide im vorigen Falle gleichgerichtet waren. Also auch jetzt ist $PA \cdot PB$ konstant, aber gleich einer gewissen negativen Größe (Fig. 66).

In beiden Fällen bezeichnet man das genannte Produkt als die Potenz des Punktes P in Bezug auf den Kreis. Die Punkte mit positiver Potenz liegen also außerhalb, die mit negativer innerhalb des Kreises, die von der Potenz Null auf ihm. Die Punkte gleicher Potenz liegen auf einem koncentrischen Kreise.

88) Ist PQ die gemeinschaftliche Sekante zweier Kreise, so gilt $PX \cdot PX_1 = t^2$ für beide Kreise, d. h. die Tangenten sind gleich, und P hat in Bezug auf beide Kreise und das gesamte Kreisbüschel durch X und X_1 dieselbe Potenz. Dies gilt für jeden äußeren Punkt der Sekante.

Fig. 67.



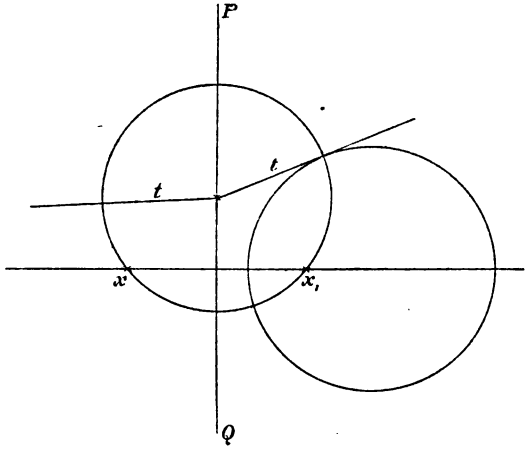
Für jeden inneren Punkt der Sekante ist $PX \cdot PX_1 = -s^2$, d. h. die kürzeste Sehne durch einen inneren Punkt der Sekante hat in beiden Kreisen und in allen des Büschels dieselbe Länge. (Die Endpunkte der kürzesten Sehnen durch P_1 liegen auf einem Kreise.)

Man nennt daher die gemeinschaftliche Sekante die Potenzlinie des Kreisbüschels durch X und X_1.

Digitized by Google

89) Schneiden sich zwei Kreise nicht, so haben sämtliche Kreise, die beide zugleich rechtwinklig schneiden, nach Nr. 79 auf der Centrale die für beide Kreise reciproken Büschelpunkte X und X_1. Da die Mittelpunkte des Büschels auf dem Mittellote von X und X_1 liegen, so sind die Tangenten von jedem Punkte dieses Lotes aus nach beiden Kreisen gleich. Demnach ist dieses Lot PQ die Potenzlinie der beiden sich nicht schneidenden Kreise und für die ganze Kreisschar, die das Büschel orthogonal schneidet.

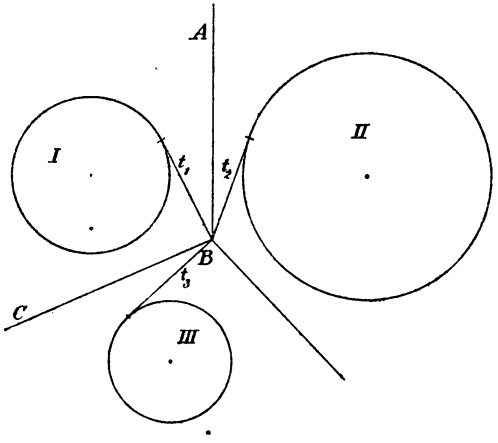
Fig. 68.



Die Potenzlinien zweier orthogonaler Kreisscharen stehen also aufeinander senkrecht, und die der einen Schar ist die Centrale der andern.

Berühren sich zwei Kreise, so ist die gemeinschaftliche Tangente im Berührungspunkte die Potenzlinie.

Fig. 69.



90) **Satz.** Die Potenzlinien dreier Kreise schneiden sich in einem Punkte.

Beweis. In Fig. 69 sei AB Potenzlinie für die Kreise I und II, CB für die Kreise I und III, also $t_1 = t_2$ und $t_1 = t_3$. Daraus folgt $t_2 = t_3$, folglich ist B auch ein Punkt der Potenzlinie von II und III.

Ebenso ist der Beweis bei Kreisen, die so liegen, daß jener Schnitt-

Digitized by Google

punkt B ins Innere fällt (Fig. 70), nur sind dann statt der gleichen Tangenten gleiche kürzeste Sehnen zu nehmen. Der Schnittpunkt heißt in beiden Fällen Potenzcentrum.

Fig. 70.

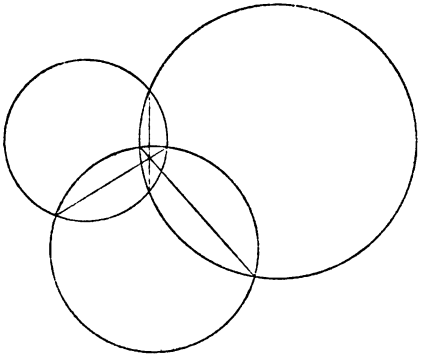
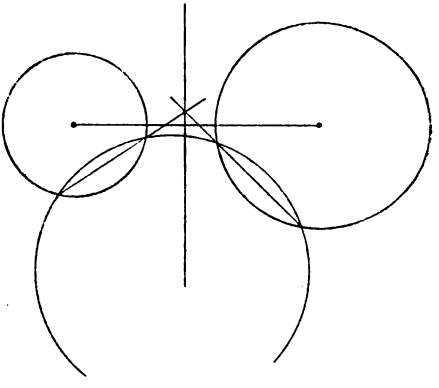


Fig. 71.



91) **Aufgabe.** Die Potenzlinie zweier sich nicht schneidenden Kreise zu konstruieren.

Auflösung. Man schlage einen Kreis, der beide Kreise schneidet, ziehe die gemeinschaftlichen Sekanten und fälle von ihrem Schnittpunkte aus ein Lot auf die Centrale der gegebenen Kreise (Fig. 71).

Bemerkung. Wird ein Kreisbüschel oder eine Kreisschar von einem beliebigen Kreise geschnitten, so gehen die gemeinschaftlichen Sehnen zwischen diesem und dem ganzen Kreissysteme durch einen Punkt der Potenzlinie des letzteren. (Warum?)

92) Ist A_3 der äußere Ähnlichkeitspunkt der Kreise M_1 und M_2, so sind die Berührungssehnen B_1C_1 und B_2C_2, die man als Ähnlichkeitspolaren bezeichnet, parallel (Fig. 72).

Zieht man eine Sekante A_3D_1, so sind die Schnittpunkte J_1 und J_2 Berührungspunkte eines gleichartigen Berührungskreises M_3.

P_1 sei Pol der Ähnlichkeitsachse $A_3J_1J_2$. Weil ferner B_1 der Pol der Tangente B_1A_3 ist, so ist P_1B_1 die Polare vom Schnittpunkte A_3. Folglich: Der Pol P_1 der Ähnlichkeitsachse $A_3J_1J_2$ liegt auf der Ähnlichkeitspolare B_1C_1.

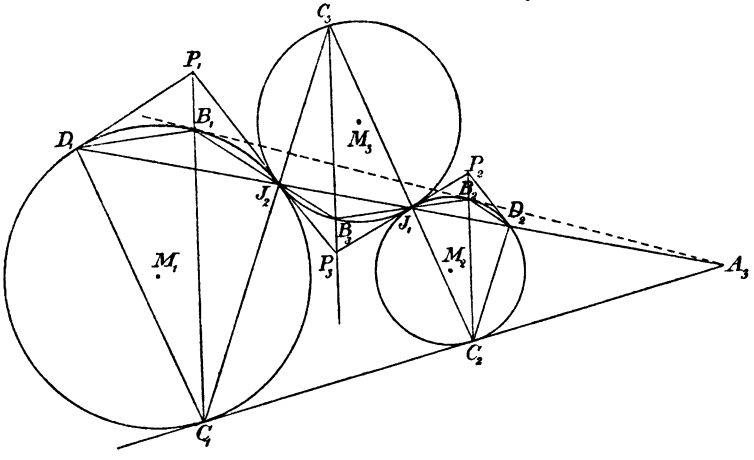
Ebenso liegt der Pol P_2 auf der Ähnlichkeitspolare B_2C_2. Daß endlich der Pol P_3 auf der Potenzlinie liegt, die zu der Ähnlichkeitspolare parallel ist, wurde schon mehrfach bemerkt.

Die gesamte Zeichnung zu M_1 ist perspektivisch zur Zeichnung

Digitized by Google

für M_2 in Bezug auf A_3; die gesamte Zeichnung zu M_3 ist perspektivisch zu der für M_1 in Bezug auf J_2; die gesamte Zeichnung

Fig. 72.



zu M_3 ist perspektivisch zu der für M_2 in Bezug auf J_1. Also liegen $P_1J_2P_3$, $P_2J_1P_3$ und $P_1P_2A_3$ auf geraden Linien, ebenso $C_1J_2C_3$, $B_1J_2B_3$; $C_2J_1C_3$ und $B_2J_1B_3$. Folglich:

Verbindet man die Endpunkte einer Ähnlichkeitspolare zweier Kreise mit dem Berührungspunkte eines Berührungskreises, so erhält man auf diesem Kreise Punkte der Potenzlinie der beiden ersten Kreise.

Aufgabe. Stelle entsprechende Betrachtungen für den Fall ungleichartiger Berührung an.

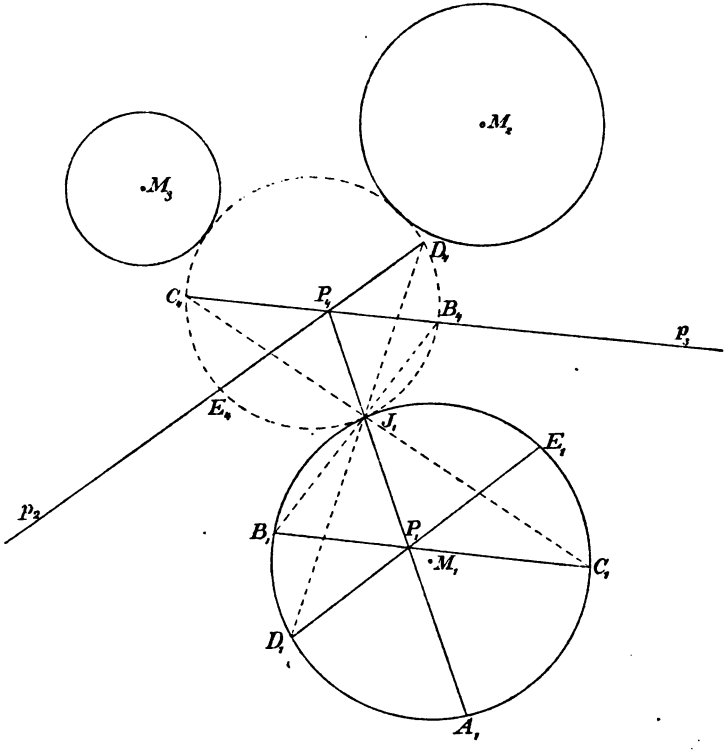
93) In Fig. 73 werden die Kreise M_1, M_2 und M_3 von einem vierten berührt. Ist nun B_1C_1 eine äußere Ähnlichkeitspolare für M_1 und M_2, so geben die Geraden $B_1J_1B_4$ und $C_1J_1C_4$ die Potenzlinie B_4C_4 oder p_3. Ebenso giebt die Ähnlichkeitspolare D_1E_1 zu M_1 und M_3 durch $D_1J_1D_4$ und $C_1J_1C_4$ die Potenzlinie D_4E_4 oder p_2. Da nun die Geraden B_1C_1 und D_1E_1 perspektivisch zu B_4C_4 und D_4E_4 in Bezug auf den Punkt J_1 sind, so sind auch ihre Schnitte P_1 und P_4 perspektivisch in Bezug auf J_1. Folglich:

Werden drei Kreise von einem vierten gleichartig berührt, so liegt ihr Potenzcentrum P_4 auf gerader Linie mit dem Berührungspunkte J jedes der drei Kreise und dem Schnitte P seiner beiden äußeren Ähnlichkeitspolaren.

Digitized by Google

Aufgabe. Stelle die betreffenden Betrachtungen für andere Fälle der Berührung auf, z. B. lauter äußerliche Berührungen, oder ungleichartige Berührungen.

Fig. 73.



Bemerkung. Da D_1E_1 und B_1C_1 äußere Ähnlichkeitspolaren sind, so ist P_1 Pol der äußeren Ähnlichkeitsachse. Jede Ähnlichkeitsachse hat in den drei Kreisen drei Pole, so daß im ganzen für 4 Ähnlichkeitsachsen 12 Pole vorhanden sind. Da nun je drei Pole zu zwei Berührungen Veranlassung geben, giebt es acht verschiedene Arten der Berührung d. h. acht Berührungskreise dreier Kreise. Bedeutet a äußerliche, i innerliche Berührung, so handelt es sich um folgende Fälle: $\underset{a}{M_1}\underset{a}{M_2}\underset{a}{M_3}$; $\underset{i}{M_1}\underset{i}{M_2}\underset{i}{M_3}$; $\underset{a}{M_1}\underset{i}{M_2}\underset{i}{M_3}$; $\underset{i}{M_1}\underset{a}{M_2}\underset{i}{M_3}$; $\underset{i}{M_1}\underset{i}{M_2}\underset{a}{M_3}$; $\underset{i}{M_1}\underset{a}{M_2}\underset{a}{M_3}$; $\underset{a}{M_1}\underset{i}{M_2}\underset{a}{M_3}$; $\underset{a}{M_1}\underset{a}{M_2}\underset{i}{M_3}$.

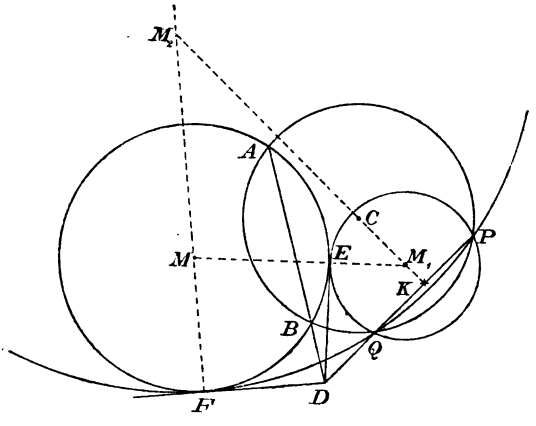
Digitized by Google

XI. Einige Berührungsaufgaben.

94) **Aufgabe.** Einen Kreis zu konstruieren, der durch zwei gegebene Punkte geht und einen gegebenen Kreis berührt.

Auflösung. In Fig. 74 sei M der gegebene Kreis, P und Q seien die gegebenen Punkte. Mit Hülfe der Mittelsenkrechten von PQ schlage durch beide Punkte einen Kreis C, der den Kreis M in Punkten A und B schneidet; AB und PQ geben den Schnitt D. Aus der Tangente DE ergiebt sich der Radius ME, der die Mittelsenkrechte KC in M_1 schneidet. Ebenso ergiebt sich aus der Tangente DF der Radius FM, der KC in M_2 schneidet. M_1 und M_2 sind die Mittelpunkte der gesuchten Kreise.

Fig. 74.



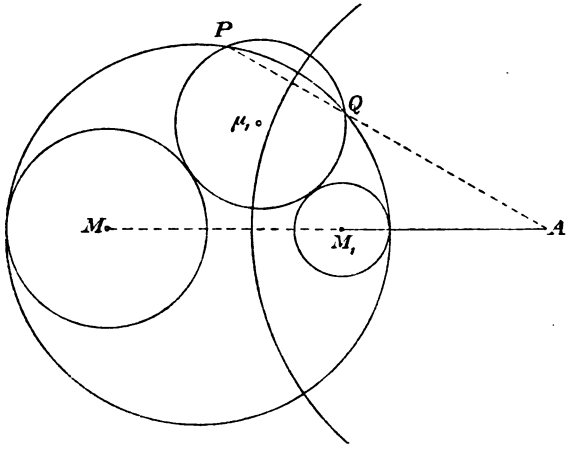
Der Beweis beruht darauf, daß die dritte Potenzlinie, d. h. die Tangente DE bezw. DF mit AB und PQ durch denselben Punkt gehen muß.

95) **Aufgabe.** Einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Kreise gleichartig berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

Auflösung. In Fig. 75 seien M und M_1 die gegebenen Kreise und P der gegebene Punkt. Man zeichne den Kreis A, der den Kreis M durch reciproke Spiegelung in den Kreis M_1 verwandelt. (Sein Radius ist mittlere Proportionale zwischen AB und AC, wo A äußerer Ähnlichkeitspunkt ist, während B und C die inneren Schnittpunkte der Centrale sind.) Man spiegele gegen diesen Kreis den Punkt P reciprok ($AQ \cdot AP = r^2$). Jetzt sind die beiden Kreise zu beschreiben, die durch P und Q gehen und den Kreis M (oder M_1) berühren. (Vgl. vorige Aufgabe.)

Digitized by Google

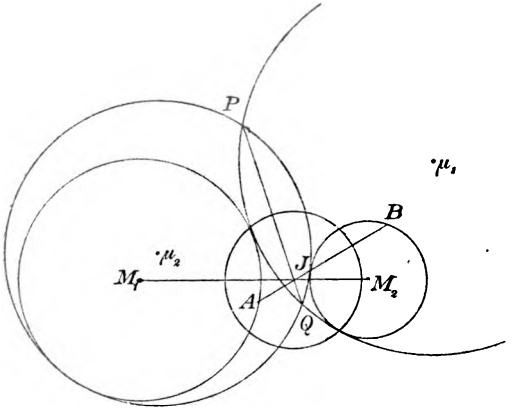
Fig. 75.



96) **Aufgabe.** Einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Kreise ungleichartig berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

Auflösung. In Fig. 76 seien M_1 und M_2 die gegebenen Kreise und P der gegebene Punkt. Man ziehe durch den inneren Ähnlichkeitspunkt J die beliebige Sekante AB und schlage um J einen Kreis mit der mittleren Proportionale von JA und JB. Dann bilde man JQ aus $JP \cdot JQ = r^2$. Durch P und Q ist ein Kreis zu legen, der einen der beiden gegebenen Kreise innerlich oder äußerlich berührt.

Fig. 76.



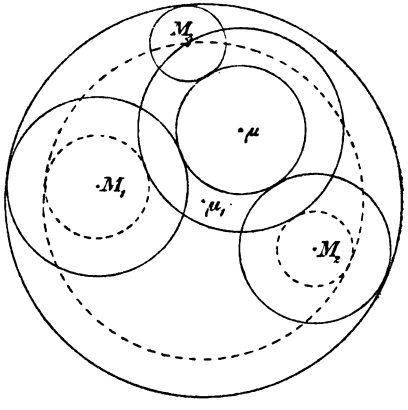
Bemerkung. Ist einer der beiden Kreise eine Gerade ($r = \infty$), so treten die Schnittpunkte des auf der Geraden senkrechten Durchmessers als äußerer und innerer Ähnlichkeitspunkt auf. Sonst ist nichts geändert.

Digitized by Google

97) **Aufgabe.** Einen Kreis zu beschreiben, der drei gegebene Kreise gleichartig berührt.

Auflösung 1. In Fig. 77 seien M_1, M_2 und M_3 die gegebenen Kreise, und zwar M_3 der kleinste. Die Radien seien r_1, r_2 und r_3. Man schlage um M_1 und M_2 Kreise mit den Radien $(r_1 - r_3)$ und $(r_2 - r_3)$ und konstruiere die beiden Kreise, die die Hülfskreise gleichartig berühren und durch den Punkt M_3 gehen. Die in Wirklichkeit gesuchten Kreise sind koncentrisch zu diesen beiden.

Fig. 77.



Bemerkung. Sollen M_1 und M_2 gleichartig, aber M_3 ungleichartig berührt werden, so schlage man die Hülfskreise mit den Radien $(r_1 + r_3)$ und $(r_2 + r_3)$. Die übrigen Fälle erledigen sich mit Hülfe des inneren Ähnlichkeitspunktes. Die 8 möglichen Fälle sind in Nr. 93 angegeben.

Auflösung 2. Suche das Potenzcentrum P_4 der drei Kreise und zeichne in jeden die beiden äußeren Ähnlichkeitsachsen, deren Schnitte in jedem der Kreise P_1, P_2 und P_3 seien. Die Geraden P_1P_4, P_2P_4, P_3P_4 geben die Berührungspunkte J_1, J_2 und J_3 für den äußerlich berührenden Kreis, und zugleich die Berührungspunkte A_1, A_2 und A_3 für den innerlich berührenden Kreis. (Vergleiche Fig. 73.)

Bemerkung. Mit Hülfe innerer Ähnlichkeitspolaren gelangt man zu den ungleichartigen Berührungen.

XII. Kartographische Anwendungen.

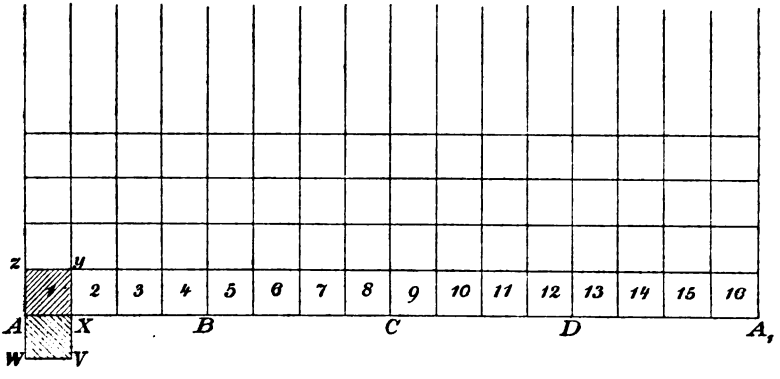
98) Zunächst soll die Weltkarte nach Gerhard Kremer, genannt Mercator, kurz erläutert werden.

Da die Oberfläche der Kugel sich nicht in die Ebene ausbreiten läßt, wie z. B. die des Cylinders und des Kegels, so läßt sich zu dem Gradnetz ihrer Meridiane und Parallelkreise kein vollkommen treues ebenes Bild geben, sondern es treten bestimmte Verzerrungen ein, je nachdem die Karte diese oder jene Bedingung erfüllen soll. Um einen Einblick in die Lehre von den Gradnetzen zu erhalten,

Digitized by Google

teile man die Kugeloberfläche z. B. durch 16 unter gleichen Winkeln aufeinander folgende Meridiane in kongruente Flächenteile ein. Bei den Parallelkreisen sehe man zunächst von der Aufeinanderfolge nach Graden ab, und denke sich die ersteren so gelegt, daß die Kugelfläche in ein System von „Quadraten" eingeteilt wird. Diese Quadrate*) werden nach den Polen hin kleiner und kleiner. Ihre Zahl ist unendlich groß. In Fig. 78 ist die Quadrateinteilung eines ebenen Parallelstreifens dargestellt, und zwar befinden sich über der Geraden AA_1 ebenfalls 16 Quadrate. Diese Gerade soll dem Äquator des Erdglobus entsprechen, die gezeichneten Senkrechten den Meridianen, die in gleichen Abständen aufeinanderfolgenden Horizontalen den

Fig. 78.



obigen Parallelkreisen auf der Kugelfläche. (Im Beispiele $n = 16$, folgen die Meridiane der Kugel unter $\frac{360°}{16}$ oder $22\frac{1}{2}°$ aufeinander.)

Fig. 78 entspricht der nördlichen Halbkugel der Erdoberfläche. Nach oben erstreckt sich die Zeichnung des Streifens bis in unendliche Entfernung, weil die Quadrate hier gleich groß sind, ihre Anzahl aber unendlich groß ist. Erweitert man die Zeichnung nach unten, so erhält man auch das Bild der südlichen Halbkugel.

Zeichnet man in die entsprechenden Quadrate die Länderformen ein, so erhält man die Weltkarte in Mercators Darstellung. Diese hat den Vorzug, daß ihre „Quadrate" denen der Kugel in um so höheren Grade ähnlich sind, je größer man die Anzahl der Meridiane

*) Von Quadraten kann man eigentlich erst reden, wenn die Meridiane und Parallelkreise so zahlreich genommen werden, daß die sehr kleinen Flächenräume als eben und geradlinig betrachtet werden können. Methoden, diese Einteilung korrekt durchzuführen, werden später gegeben.

Digitized by Google

genommen hat. Die Zeichnungen innerhalb kleiner Quadrate sind also ähnlich, oder, wie man sich ausdrückt, die Mercatorkarte stellt kleine Flächenteile der Erdoberfläche ähnlich dar, obwohl das Gesamtbild der Erdoberfläche nicht ähnlich ist. Abbildungen solcher Art bezeichnet man als konforme Abbildungen.

Der zweite Vorteil beruht darin, daß die von Nord nach Süd gehenden Linien sämtlich senkrecht, die von West nach Ost gehenden sämtlich horizontal sind, so daß man alle Himmelsrichtungen an jeder Stelle als gerade Linien eintragen kann, und daß den gleichen Himmelsrichtungen parallele Gerade entsprechen. So geben z. B. alle Quadratdiagonalen die Richtungen Nordost, Nordwest, Südwest, Südost an. Setzt also z. B. ein Schiff auf dem Ozean seinen Weg stets in derselben Himmelsrichtung fort, behält es also denselben Kurs bei, so ist die Abbildung des Wegs auf der Mercatorkarte eine gerade Linie. Will also ein Kapitän z. B. von der Südspitze Irlands stets mit demselben Kurs nach Cayenne fahren, und zieht er auf der Mercatorkarte die entsprechende Verbindungslinie, so erhält er die Himmelsrichtung, in der er zu steuern hat, auf das genaueste. Daher ist die Mercatorkarte als Schiffahrtskarte allgemein verbreitet. Jeden Tag bestimmt der Kapitän den Ort des Schiffes*), erkennt dabei, wie weit er durch Meeresströmungen, Wind oder ungenaues Steuern sich von der gezeichneten Geraden entfernt hat und korrigiert den Kurs des Schiffes.

Einen Nachteil aber hat die Karte in folgender Hinsicht. Während die obigen „Quadrate" auf dem Globus nach den Polen hin zu unendlicher Kleinheit abnehmen, bleiben sie auf der Mercatorkarte gleich groß; während dort die Meridiane den beiden Polen zustrebend sich immer mehr nähern, behalten sie hier stets denselben Abstand. Stimmen also die Quadratdimensionen am Äquator des Globus und der Mercatorkarte überein, so hört diese Übereinstimmung nach Norden in zunehmendem Grade auf, und in den unendlich fern liegenden Polen der Mercatorkarte ist die Darstellung derart vergrößert zu denken, daß uns die Ausdrucksweise gestattet ist, dort sei der Maßstab der unendlichfache, wie auf dem Globus. Also, je weiter nach den Polen hin, um so größer wird der Maßstab der Mercatorkarte. So erscheint z. B. Grönland größer als ganz Afrika, obwohl es in Wahrheit weit kleiner ist. Die Nachbarschaft der beiden Pole

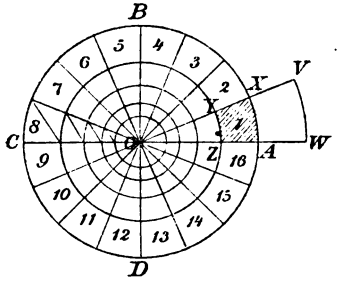
*) Aus der Höhe des Polarsterns oder der Mittagshöhe der Sonne findet er z. B. die nördliche Breite, aus der Differenz zwischen der Mittagszeit des Ortes und der des Ausgangsortes, die an dem dort gestellten Chronometer abzulesen ist und 4 Minuten auf den Grad beträgt, bestimmt er die Länge.

Digitized by Google

kann auf der Mercatorkarte gar nicht dargestellt werden, da sonst die Karte nach oben und unten ins Unendliche gehen müßte. Man bricht die Darstellung gewöhnlich in der Nähe des 80. Grades nördlicher und südlicher Breite ab. Da die Polargegenden nicht bekannt sind, und da von regelmäßiger Schiffahrt dort nicht die Rede sein kann, hat dieser Umstand die Brauchbarkeit der Karte nicht beeinträchtigt. [Die Karten der physikalischen Geographie, z. B. die der magnetischen Meridiane, Isoklinen, Isodynamen, Isothermen, Isanomalien, Isorachien u. s. w. sind in der Regel nach Merkators Projektion dargestellt.]

99) In Fig. 79 ist ein Kreis, dessen Umfang $ABCDA$ gleich der Länge des Äquators der Mercatorkarte sein soll, durch ein Strahlenbüschel und die koncentrische Kreisschar in ähnliche „Rechtecke" eingeteilt. Dies ist erreicht, sobald jeder Radius die mittlere Proportionale zu den beiden benachbarten Radien ist, und wenn die Strahlen unter gleichen Winkeln aufeinander folgen. Das erstere erzielt man durch parallele Diagonalen, wie sie auf CO dargestellt sind.

Fig. 79.



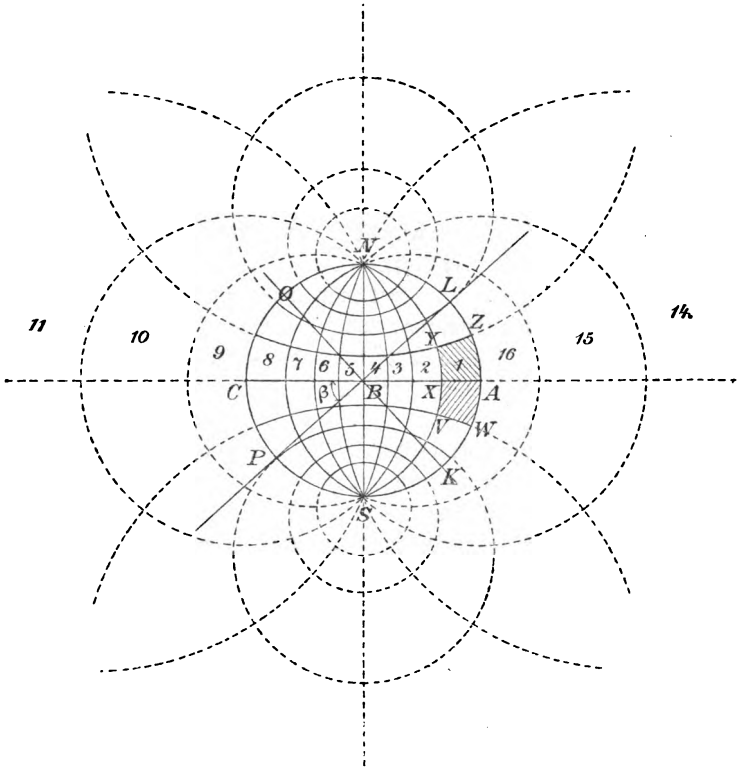
Sind nun die kleinen Rechtecke „Quadrate", so ist das Quadratnetz*) ganz dem der Mercatorkarte und des Globus entsprechend. So sind z. B. die Quadrate von 1 bis 16 die Bilder der gleichzahligen Quadrate der Mercatorkarte. So erhält man die Polarkarte von Hipparch-Ptolemäus, die sich in der Stereometrie als eine bestimmte Centralprojektion der Kugelfläche herausstellen wird. Sie giebt eine conforme Darstellung der halben Mercatorkarte und zugleich der Nord- oder Südhalbkugel des Globus.

*) In Nr. 81 ist bereits gesagt, daß man die quadratische Teilung bei n Sektoren erreicht, wenn die Radien nach außen im Verhältnis $1 : e^{\frac{2\pi}{n}}$ auf einander folgen, wo $e = 2{,}7182818\ldots$ die Basis der natürlichen Logarithmen ist. Hier also handelt es sich nm das Verhältnis $1 : e^{\frac{2\pi}{16}} = 1 : 1{,}480972$. Nach innen folgen die Radien einander nach der Reihe $e^0, e^{-\frac{2\pi}{n}}, e^{-\frac{4\pi}{n}}, e^{-\frac{6\pi}{n}}$ u. s. w. Durch diese Zahlen erkennt man zugleich die Vergrößerungsverhältnisse zwischen jeder Stelle des Innern und der Mercatorkarte, deren Maßstab gleich dem des Randkreises genommen war.

Digitized by Google

Der Symmetrie der Mercatorkarte gegen den Äquator entspicht bei der Polarkarte des Hipparch die Reciprocität gegen den Grenzkreis. Man kann also die Polarkarte über den Äquator hinaus fortsetzen. So ist z. B. $AWVX$ das zu $AZYX$ reciproke „Quadrat". (Vgl. Fig. 79.) Dabei nehmen aber die Dimensionen der Quadrate bald derart zu (sogar im Verhältnis zu denen der Mercatorkarte), daß man sich gewöhnlich auf die Darstellung der einen Halbkugel beschränkt und für die andere eine besondere Zeichnung macht. Für die mathematische Betrachtung ist es gut, das Quadratnetz nach außen fortzusetzen.

Fig. 80.

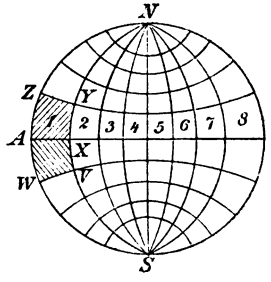


100) Man schlage jetzt in Fig. 79 um D einen Kreis, der durch A (und C) geht und bilde das reciproke Spiegelbild der Zeichnung gegen diesen Kreis. Da letzterer den Grenzkreis und die Horizontale

Digitized by Google

unter 45^0 schneidet, geht der Grenzkreis (Äquator) in die Horizontale und diese in den Grenzkreis über. B und der Nordpol vertauschen ihre Stellen, A und C bleiben, der unendlich ferne Bereich rückt nach D, welches des Südpols wegen jetzt S heiße, und das Strahlenbüschel geht in das Kreisbüschel durch N und S, die koncentrische Kreisschar in die Orthogonalschar des Büschels über. Man erhält so in Fig. 80 die obere Hälfte der Karte der östlichen Halbkugel und ihre reciproke Fortsetzung nach außen, nur muß die Karte noch um die senkrechte Mittellinie geklappt werden, um der des Mercator bezüglich der Himmelsrichtung genau zu entsprechen, wodurch Fig. 81 entsteht*).

Fig. 81.



Dem Quadratnetz der Polarkarte entspricht wegen des conformen Charakters der Abbildung auch hier ein Quadratnetz. Die gleichmäßige Einteilung des Randes in Fig. 79 ist auf den Äquator in Fig. 80 projiziert worden. Da aber $DB : DO = 1 : 2$ war, so ist der Maßstab in der Mitte von Fig. 80 halb so groß, als am Rande, wo er dem Äquatorialmaßstabe der Mercatorkarte entspricht.

Hat man umgekehrt auf der Karte der Osthalbkugel gleiche Randteilung, was der Gradeinteilung entspricht, so erhält man durch dieselbe Projektion die Gradteilung der Polarkarte. Die Stereometrie wird diese Dinge noch weiter aufklären.

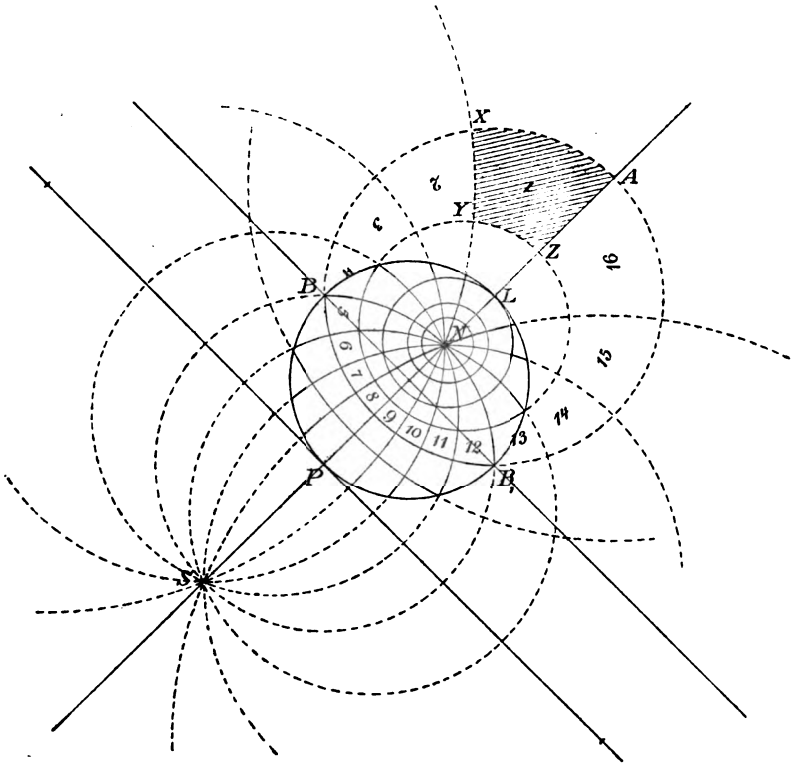
101) Jeder größte Kreis des Globus schneidet den Äquator in zwei Gegenpunkten (Antipodenpunkten). Solche sind in Fig. 80 B und jeder unendlich ferne Punkt B_1. Jede Gerade durch B ist also ein größter Kreis des Globus, so z. B. PL, ebenso die dazu Senkrechte KO. Schlägt man um K einen Kreis mit KL, und bildet man

*) Wie wenig die Halbkugelkarten des Hipparch als Schiffahrtskarten tauglich sind, ergiebt sich z. B. aus der Untersuchung der Quadratdiagonalen, die der Richtung Südwest-Nordost und Nordwest-Südost entsprechen. Auf der Mercatorkarte handelt es sich dabei um gerade Linien von 45^0 Neigung, in der Polarkarte aber um Kurven, die man als logarithmische Spiralen bezeichnet und die unzählige Windungen um den Pol machen; in der Karte der östlichen Halbkugel um die sogenannten logarithmischen Doppelspiralen oder Bicircularspiralen, die um jeden Pol unzählige Windungen machen. Auf dem Globus entsprechen ihnen die sogenannten Loxodromen (Schieflauflinien). Sämtliche werden für den Schnittwinkel 45^0 als Diagonalkurven des Quadratnetzes bequem skizziert.

Digitized by Google

durch reciproke Spiegelung gegen diesen das Inversionsbild zu Fig. 80, so verwandelt sich die Gerade $PBL\infty$ in den Grenzkreis durch K und O, dieser in jene Gerade, der Pol N fällt innerhalb des neuen Grenzkreises, und zwar auf den Schnitt von PL und KN, ebenso der Punkt S auf den Schnitt von KS und PL in Fig. 80. Ebenso

Fig. 82.

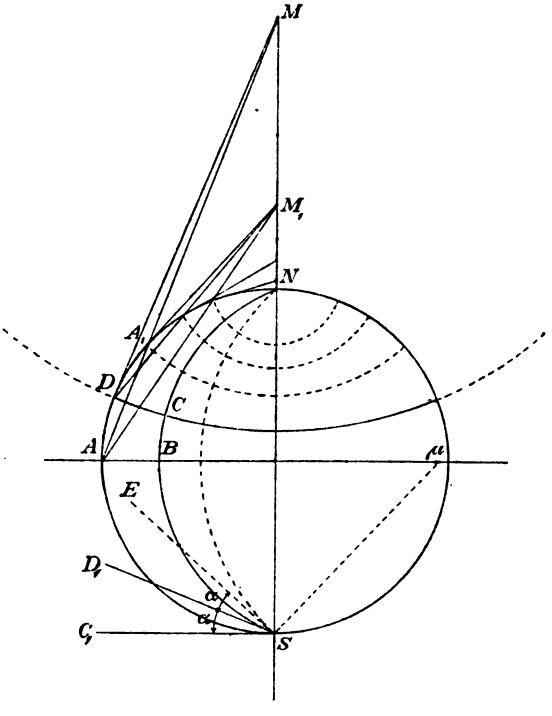


fallen A und C auf die Schnitte von PL und KA bezw. KC. Das Kreisbüschel durch N und S geht über in das Büschel durch die neuen Punkte N und S, Fig. 82 stellt die neue Karte dar. Sie entspricht z. B. den Karten der größten Land- und Wassermasse, wenn der Schnittwinkel β bei B richtig gewählt war.

102) **Aufgabe.** Das Rechtecksnetz selbständig zu vollenden, wenn die vier Grenzkreise eines „Rechtecks" gegeben sind.

Digitized by Google

Fig. 83.



Auflösung. $ABCD$ in Fig. 83 sei das gegebene „Rechteck". Die Tangente in D giebt M auf SN. Die Gerade MA giebt den Schnitt A_1, die Tangente A_1M_1 giebt den Mittelpunkt für den neuen Kreis der Schar. DM_1 und AM_1 geben zwei neue Teilpunkte u. s. w., so daß man beliebig viele Kreise der Schar zeichnen kann. In S mögen die Tangenten SC_1 und SD_1 der gegebenen Büschelkreise den Winkel α einschließen. Man mache $\sphericalangle D_1SE = C_1SD_1 = \alpha$, errichte auf SE das Lot $S\mu$ bis zur Horizontalen, dann ist μ der Mittelpunkt für den folgenden Büschelkreis u. s. w.

XIII. Der Koordinatenbegriff.

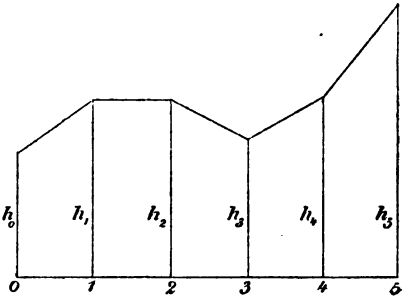
a) Graphische Darstellungen.

103) Statistische Verhältnisse pflegt man auf graphischem (zeichnendem) Wege zu veranschaulichen. So könnten z. B. durch Fig. 84 die Schwankungen in der Frequenz einer Schule für einen Zeitraum von 5 Jahren dargestellt werden. Die gleichen Abschnitte auf der Horizontalen bedeuten die gleichen Zeiträume (Jahre), die regelmäßige Bewegung von 0 bis 5 den Verlauf der Zeit. Die Höhen verhalten

Digitized by Google

sich wie die entsprechenden Frequenzzahlen. Zunahme im ersten, Gleichbleiben im zweiten, Abnahme im dritten, Zunahme im vierten, verstärkte Zunahme im fünften Jahre sind ohne weiteres zu erkennen.

Fig. 84.

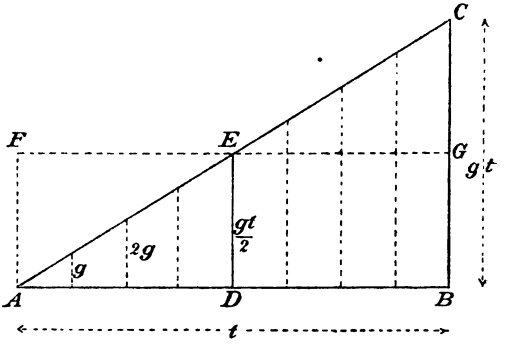


Ebenso veranschaulicht man die Schwankungen in der Bevölkerung von Städten und Staaten, in der Transportmenge von Eisenbahnen und Hafenanlagen, die Schwankungen in der Produktion der Landwirtschaft, der Bergwerke, der Industrie, die Preisschwankungen des Getreides, des Eisens u. s. w., die Schwankungen der Temperatur, des Luftdrucks (Barometerstandes), des Wasserstandes der Flüsse, u. s. w. Bei einer größeren Anzahl gleicher Zeiträume kann man die mittlere Höhe als die Veranschaulichung des mittleren Zustandes betrachten.

104) Aus einigen Beispielen wird man den Nutzen solcher Darstellungen für die mathematische Physik erkennen.

Fig. 85 veranschaulicht die gleichförmige Zunahme der Geschwindigkeit eines im luftleeren Raume freifallenden (oder eines von konstanter Triebkraft bewegten) Körpers. Ist g die Geschwindigkeitszunahme für jede Sekunde, so hat der Körper nach 8 Sekunden die Geschwindigkeit $8g$, nach t Sekunden die Geschwindigkeit gt. Die Endpunkte der Geschwindigkeitslote liegen in einer Geraden. Das mittlere Lot giebt die mittlere Geschwindigkeit $\frac{gt}{2}$ an. Diese,

Fig. 85.



auf die Zeit t ausgedehnt, giebt den Weg $\frac{1}{2}gt^2$, und zwar auch für die beschleunigte Bewegung, der Inhalt des Dreiecks von Basis t und Höhe gt ist ebenfalls $\frac{1}{2}gt^2$. Die Dreiecksfläche stellt

Digitized by Google

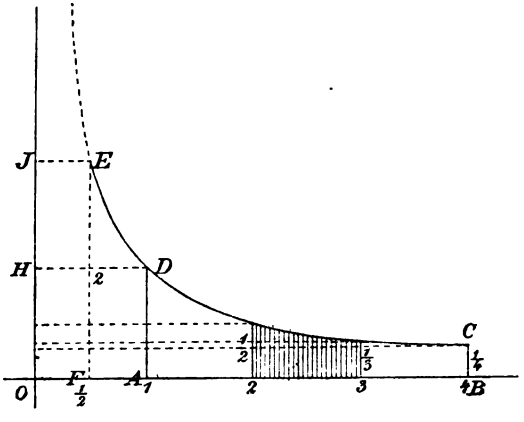
also den vom Körper zurückgelegten Weg dar. Die einzelnen Trapezflächen geben den Weg in den einzelnen Sekunden an. Das Rechteck der mittleren Geschwindigkeit $ABGF$ hat natürlich dieselbe Fläche wie das Dreieck. — Bezeichnet man den veränderlichen Horizontalabstand von A mit x, so ist die Höhe an jeder Stelle $y = gx$.

In ähnlicher Weise kann man die Bewegung veranschaulichen, die bei dem senkrechten Schuß nach oben entsteht. Aus der Figur (dem „Diagramm") kann man alle entsprechenden Bewegungsverhältnisse ablesen.

105) Als zweites Beispiel diene die graphische Darstellung des Mariotteschen Gesetzes. Nach diesem ist, wenn man konstante Temperatur voraussetzt, die Spannung einer Gasmenge umgekehrt proportional dem Volumen.

In Fig. 86 ist nun folgendes dargestellt. Die Punkte 0, 1, 2, 3, 4 der Grundlinie stellen die Volumina 0, 1, 2, 3, 4 dar. An der Stelle 1 ist die Spannung $AD = 1$ angenommen, z. B. gleich 1 Atmosphäre (10 334 kg pro qm der Druckfläche). Dann ist an Stelle 2, 3, 4, .. die Spannung $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... als Lot aufzusetzen. Dagegen würde an Stelle $\frac{1}{2}$ das Lot $\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2$ zu zeichnen sein. Das Diagramm kann nach links bis zur Stelle $x = 0$, nach rechts bis zum unendlichen Bereiche ($x = \infty$) ausgedehnt werden. Die Endpunkte der Lote bilden eine später zu besprechende Kurve, die man als die Mariottesche Kurve bezeichnen kann. (Sie wird wegen Annahme konstanter Temperatur auch als Isotherme bezeichnet.) Gewisse in der Figur angedeutete Rechtecke sind inhaltsgleich, z. B. $OFEJ$ und $OADH$.

Fig. 86.



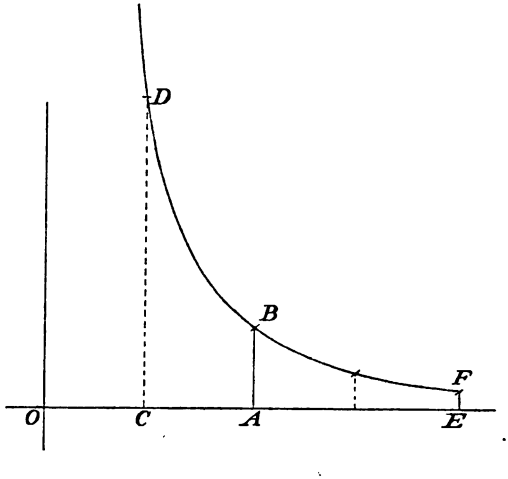
Da in der Mechanik das Produkt aus der Kraft und dem Kraftwege Arbeit bedeutet, so stellen die kleinen als Rechtecke aufzufassenden

Digitized by Google

senkrechten Flächenstreifen, wie sie von 2 bis 3 angedeutet sind, Arbeiten dar, die z. B. in Meterkilogrammen zu messen sind. Die Fläche $ABCD$ stellt also die Expansionsarbeit dar, welche die Luft bei der Ausdehnung auf das vierfache Volumen leistet, wenn die Temperatur dabei konstant gehalten wird. Dagegen stellt die Fläche $ADEF$ die Arbeit dar, die nötig ist, um unter Konstanthaltung der Temperatur dieselbe Luft auf das halbe Volumen zusammenzupressen. Es handelt sich also in Fig. 86 zugleich um das Arbeitsdiagramm für Expansion und Kompression unter der Bedingung konstanter Temperatur. Bezeichnet man den veränderlichen Horizontalabstand von O mit x, so ist die zugehörige Höhe stets $y = \frac{1}{x}$.

106) Als drittes Beispiel diene die graphische Darstellung des Newtonschen Gravitationsgesetzes. Nach diesem ist die gegenseitige Anziehung zweier Himmelskörper umgekehrt proportional dem Quadrate ihrer gegenseitigen Entfernung. Befindet sich z. B. die Sonne in O, die Erde in A (Fig. 87), und stellt AB die Größe der gegenseitigen Anziehung für die Entfernung OA dar, so ist diese für die halbe Entfernung OC viermal so groß, für die doppelte Entfernung OE der vierte Teil. Setzt man also $OA = 1$, und einen beliebigen Horizontalabstand $= x$, so ist die zugehörige Anziehung durch das Lot $y = \frac{AB}{x^2}$ zu veranschaulichen. Auch hier stellt die Fläche zwischen der Curve und der Horizontalen eine Arbeit dar. Um z. B. den Erdball aus der Entfernung OA in die Entfernung OE zu versetzen, müßte man eine Arbeit leisten, die durch die Fläche $AEFB$ dargestellt wird. [Die Arbeit, die nötig sein würde, die Erde aus der Entfernung OA in unendliche Entfernung zu bringen, wird durch das von A aus bis ins Unendliche fortgesetzte Diagramm dargestellt und als das Potential für den Punkt A bezeichnet.]

Fig. 87.



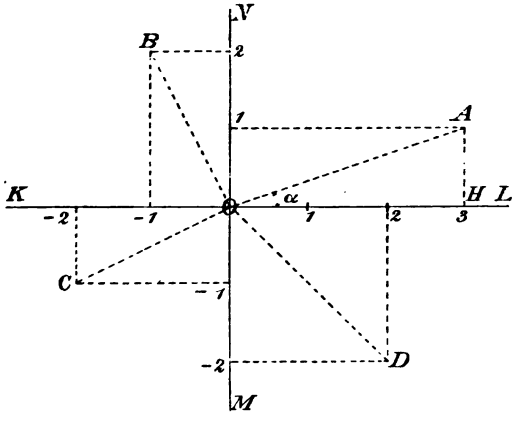
Digitized by Google

107) Man erkennt, daß sich durch solche Diagramme schwierige Dinge auf einfache Art veranschaulichen lassen. Man bezeichnet den Horizontalabstand vom Anfangspunkte als Abscisse, den Vertikalabstand als Ordinate. Beide tragen noch den gemeinschaftlichen Namen Koordinaten. Um jedoch den mathematischen Verhältnissen noch allgemeiner zu entsprechen, läßt man auch negative Abscissen und Ordinaten zu, und zwar sind die ersteren nach links, die letzteren nach unten gerichtet.

b) Die Koordinaten von Punkten.

108) In Fig. 88 hat der Punkt A die Koordinaten $x = 3$ und $y = 1$; Punkt B hat $x = -1$, $y = 2$; für den Punkt C ist $x = -2$, $y = -1$; für den Punkt D ist $x = 2$, $y = -2$.

Fig. 88.



Diese Punkte liegen der Reihe nach im 1., 2., 3. und 4. Quadranten der Ebene. Den letzteren entsprechen, wie in der Trigonometrie, der Reihe nach die Vorzeichen $+\,+$, $-\,+$, $-\,-$, $+\,-$. Die von $-\infty$ nach $+\infty$ gehende Gerade KL heißt die X-Achse, die ebenfalls von $-\infty$ nach $+\infty$ gehende Gerade MN die Y-Achse des Koordinatensystems. O heißt der Nullpunkt des letzteren. Jedem reellen Koordinatenpaare x, y entspricht ein bestimmter Punkt der Ebene, dessen Quadrant sich aus den Vorzeichen ergiebt. Umgekehrt entspricht jedem Punkte der Ebene ein reelles Koordinatenpaar.

109) Die Koordinaten x und y bezeichnet man als die Cartesischen Koordinaten, nach Descartes oder Cartesius, der sie zuerst aufgestellt hat. Da man die Lage von A auch durch den Radius $OA = r$ und den Winkel $HOA = \alpha$ darstellen kann, ebenso die Lage von B durch den Radius $OB = r$ und den Winkel $HOB = \alpha$, die

Digitized by Google

des Punktes C durch den Radius $OC = r$ und den überstumpfen Winkel $HOC = \alpha$, und endlich die Lage von D durch den Radius $OD = r$ und den überstumpfen Winkel HOD, so hat man auch r und α als Koordinaten eingeführt, die sogenannten Polarkoordinaten. An jedem der genannten Punkte erkennt man, daß zwischen den Cartesischen und den Polarkoordinaten folgende Beziehungen stattfinden:

$$r = +\sqrt{x^2+y^2},\quad \tan\alpha = \frac{y}{x},\quad \cos\alpha = \frac{x}{+\sqrt{x^2+y^2}},\quad \sin\alpha = \frac{y}{+\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$x = r\cos\alpha;\quad y = r\sin\alpha.$$

Das Vorzeichen von r wird stets positiv angenommen, der Wechsel der Vorzeichen wird den goniometrischen Funktionen überlassen, und zwar in derselben Weise, wie in der Trigonometrie.

110) **Aufgabe.** Zwei Punkte Z_1 und Z_2 haben die Koordinaten $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$, $x_2 = a_2$, $y_2 = b_2$. Wie lauten die Koordinaten des Halbierungspunktes ihrer Verbindungslinie?

Auflösung. $x = \frac{a_1 + a_2}{2}$, $y = \frac{b_1 + b_2}{2}$. Warum?

Aufgabe. Die Verbindungslinie derselben Punkte soll von Z_1 aus im Verhältnis 3:2 geteilt werden; wie lauten die Koordinaten des Teilpunktes?

Auflösung. $x = a_1 + \frac{3}{5}(a_2 - a_1) = \frac{2a_1 + 3a_2}{5}$;

$$y = b_1 + \frac{3}{5}(b_2 - b_1) = \frac{2b_1 + 3b_2}{5}.$$

Allgemeiner giebt die Teilung im Verhältnis $n_1 : n_2$ die Koordinaten

$$x = \frac{n_2 a_1 + n_1 a_2}{n_1 + n_2},\quad y = \frac{n_2 b_1 + n_1 b_2}{n_1 + n_2}.$$

Die entsprechende äußere Teilung giebt $x_1 = \frac{-n_2 a_1 + n_1 a_2}{n_1 - n_2}$, $y_1 = \frac{-n_2 b_1 + n_1 b_2}{n_1 - n_2}$. (Vergl. harmonische Punkte.)

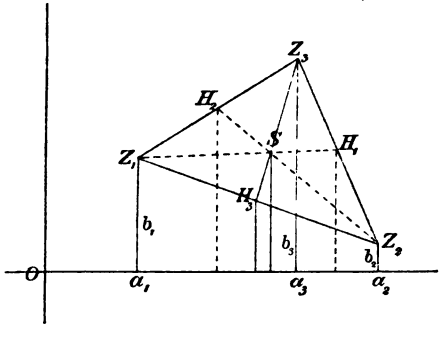
111) **Aufgabe.** Drei Punkte Z_1, Z_2, Z_3 haben die Koordinaten $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$. Welches sind die Koordinaten des Halbierungspunktes H_1 der Geraden $Z_2 Z_3$; und wie heißen die Koordinaten des Punktes S, der die Gerade $Z_1 H_1$ im Verhältnis 2 : 1 teilt?

Digitized by Google

Auflösung. Die Koordinaten von H_1 in Fig. 89 sind $x = \frac{a_2 + a_3}{2}$ und $y = \frac{b_2 + b_3}{2}$. Die Koordinaten von S sind $x = \frac{1a_1 + 2\frac{a_2 + a_3}{2}}{2 + 1}$ $= \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$, $y = \frac{1b_1 + 2\frac{b_2 + b_3}{2}}{2 + 1} = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}$.

Bemerkung. Dasselbe Resultat findet man, wenn man Z_2H_2 und ebenso Z_3H_3 im Verhältnis 2:1 teilt. Die drei Mittellinien schneiden sich also in einem Punkte, dem Punkte mittleren Abstandes von den (beliebig gewählten) Koordinatenachsen.

Fig. 89.



Nimmt man einen vierten Punkt Z_4 dazu, und teilt man SZ_4 im Verhältnis 3:1, so hat der Teilpunkt die Koordinaten

$$x = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4},$$

$$y = \frac{b_1 + b_2 + b_3 + b_4}{4}.$$

Der neue Teilpunkt ist also ebenfalls der Punkt mittleren Abstandes. In ähnlicher Weise kann man fortfahren. Die Reihenfolge der Konstruktion ist dabei vollständig gleichgültig. Man erhält so den Schwerpunkt von 3, 4, 5 ... gleich schwer zu denkenden Punkten der Ebene, der also der Punkt mittleren Abstandes von beiden Achsen ist.

112) **Aufgabe.** Zwei Punkte Z_1 und Z_2 haben die Koordinaten $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$, $x_2 = a_2$, $y_2 = b_2$. Wie lang ist ihre Verbindungslinie, und welche Neigung besitzt sie?

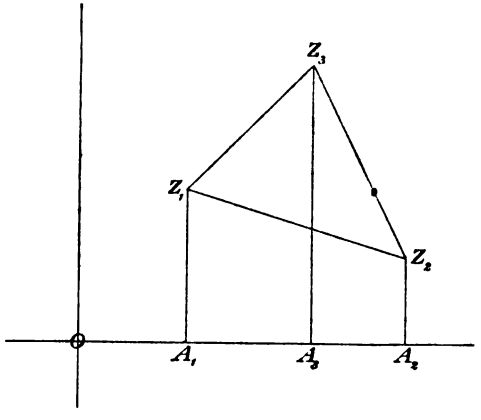
Auflösung. $\overline{Z_1Z_2} = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$. Die Neigung bestimmt sich aus $\tan\alpha = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$.

113) **Aufgabe.** Wie groß ist der Inhalt des Dreiecks $Z_1Z_2Z_3$, wenn die Eckpunkte die Abscissen a_1, a_2, a_3 und die Ordinaten b_1, b_2, b_3 haben? (Fig. 90.)

Digitized by Google

Auflösung.

Fig. 90.



$$F = A_1 A_3 Z_3 Z_1 + A_3 A_2 Z_2 Z_3 - A_1 A_2 Z_2 Z_1$$
$$= \tfrac{1}{2}(a_3 - a_1)(b_1 + b_3) + \tfrac{1}{2}(a_2 - a_3)(b_2 + b_3) - \tfrac{1}{2}(a_2 - a_1)(b_2 + b_1)$$
$$= \tfrac{1}{2}[(a_1 - a_2)(b_1 + b_2) + (a_2 - a_3)(b_2 + b_3) + (a_3 - a_1)(b_3 + b_1)].$$

Bemerkung. Für den Fall, daß die drei Punkte in einer Geraden liegen, ist die Fläche gleich Null. Die Bedingung dafür, daß die Punkte $Z_1 Z_2 Z_3$ in einer Geraden liegen, ist also durch folgende Gleichung gegeben:

$$(a_1 - a_2)(b_1 + b_2) + (a_2 - a_3)(b_2 + b_3) + (a_3 - a_1)(b_3 + b_1) = 0.$$

c) Die Gleichung ersten Grades und die gerade Linie.

114) Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Gleichung $x = a$ gilt, ist eine Parallele zur Y-Achse in der Entfernung $x = +a$. Symmetrisch dazu liegt die Gerade, für deren sämtliche Punkte die Gleichung $x = -a$ gilt. Der geometrische Ort aller Punkte, für welche $y = b$ ist, ist eine Parallele zur X-Achse in der Entfernung $y = +b$. Symmetrisch dagegen liegt die Gerade, für deren Punkte die Gleichung $y = -b$ gilt.

Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Gleichung $y = x$ gilt, ist die durch den Nullpunkt gehende Gerade von der Neigung 45^0, die den 3. und 1. Quadranten durchschneidet. Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Gleichung $y = -x$ gilt, ist die durch den Nullpunkt gehende Gerade von der Neigung 135^0 oder -45^0, die durch den 2. und 4. Quadranten geht.

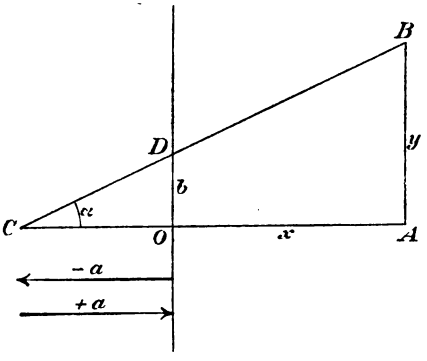
Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Gleichung $\frac{y}{x} = \tan\alpha$ oder $y = x \tan\alpha$ gilt, ist die Gerade durch den Nullpunkt von der Neigung α, die einem der vier Quadranten angehören kann.

Digitized by Google

Man nennt die betreffende Gleichung stets die Gleichung der Geraden, und man spricht der Kürze halber z. B. von der Geraden $x = a$, $y = b$, $y = x \tan \alpha$ u. s. w.

115) **Aufgabe.** Eine Gerade schneide auf der X-Achse das Stück $OC = -a$ (oder $CO = +a$) ab, auf der Y-Achse das Stück $OD = b$. Wie lautet ihre Gleichung? (Fig. 91.)

Fig. 91.



Auflösung. Man fälle von einem beliebigen Punkte B der Geraden CD das Lot BA auf die X-Achse und setze $OA = x$ und $AB = y$; dann ist $\triangle CAB \sim COD$, also $AB : OD = CA : CO$, d. h. $y : b = (a + x) : a$. Daraus folgt $y = \frac{b}{a} x + b$ oder $\frac{x}{(-a)} + \frac{y}{b} = 1$ als die Gleichung der Geraden, die beiderseitig ins Endlose verlängert zu denken ist.

Bemerkung. Die Gerade, die von der X-Achse $OC_1 = +a$, von der Y-Achse $OD = b$ abschneidet, liegt symmetrisch gegen die vorige in Bezug auf die Y-Achse. Ihre Gleichung ergiebt sich als $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Möge nun a und ebenso b positiv oder negativ sein, eine Gleichung der letzten Form stellt stets eine Gerade dar, die von den Koordinatenachsen die Stücke $OC = a$ und $OD = b$ abschneidet.

116) **Aufgabe.** Was stellt die allgemeine Gleichung ersten Grades $ax + by = c$ dar, wo a, b und c reelle Größen sind?

Auflösung. Die Gleichung läßt sich schreiben

$$\frac{x}{\left(\frac{c}{a}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{c}{b}\right)} = 1,$$

sie stellt also stets eine Gerade dar, die von der X-Achse das Stück $\frac{c}{a}$, von der Y-Achse das Stück $\frac{c}{b}$ abschneidet. Die einzige Bedingung

Digitized by Google

ist, daß a und b nicht gleichzeitig verschwinden dürfen, denn sonst würden beide Abschnitte unendlich groß sein und die Gerade ganz in den unendlichen Bereich fallen.

117) **Aufgabe.** Wie lautet die Gleichung einer Geraden, die von der Y-Achse das Stück b abschneidet und die Neigung α hat?

Auflösung. In Fig. 91 ist $\frac{AB}{OA} = \tan\alpha$, also $\frac{y}{a+x} = \tan\alpha$ oder $y = x\tan\alpha + a\tan\alpha$, also, da $a\tan\alpha = b$ ist, $y = x\tan\alpha + b$. Bezeichnet man $\tan\alpha$ als Richtungskonstante mit A, so lautet die Gleichung $y = Ax + b$.

Der Aufgabe, zwei Punkte durch eine Gerade zu verbinden, entspricht die folgende:

118) **Aufgabe.** Wie lautet die Gleichung einer Geraden, welche durch die Punkte Z_1 und Z_2 mit den Koordinaten $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$, $x_2 = a_2$, $y_2 = b_2$ geht?

Auflösung. In Fig. 92 ist $\triangle Z_2ED \sim Z_1GZ_2$, folglich

$$\frac{ED}{Z_2E} = \frac{GZ_2}{ZG},$$

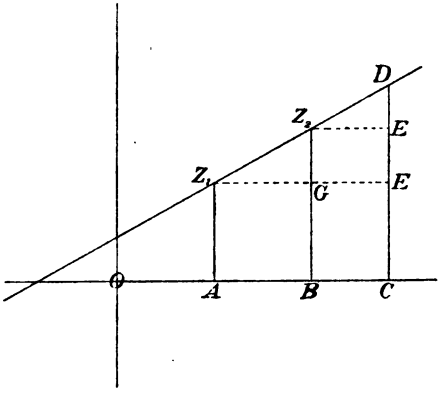
oder

$$\frac{y-b_2}{x-a_2} = \frac{b_2-b_1}{a_2-a_1},$$

oder

$$y - b_2 = (x-a_2)\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}.$$

Fig. 92.



Mit Hülfe anderer ähnlicher Dreiecke findet man ebenso

$$\frac{y-b_1}{x-a_1} = \frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}, \quad \text{und ebenso} \quad \frac{y-b_2}{x-a_2} = \frac{y-b_1}{x-a_1}.$$

119) Der Aufgabe, durch einen gegebenen Punkt eine Gerade von gegebener Neigung α zu legen, entspricht folgende

Aufgabe. Wie lautet die Gleichung einer Geraden durch den Punkt Z mit den Koordinaten a und b, welche die Neigung α hat?

Digitized by Google

Auflösung. Die entsprechende Figur ergiebt

$$\frac{y-b}{x-a} = \tan\alpha \quad \text{oder} \quad y - b = (x-a)\tan\alpha.$$

120) **Aufgabe.** Unter welchem Winkel schneiden sich die Geraden $y = A_1 x + b_1$ und $y = A_2 x + b_2$?

Auflösung. Sie schneiden sich unter einem Winkel γ, der gleich der Differenz ihrer Neigungswinkel ist, also unter $\gamma = \alpha_1 - \alpha_2$, wo sich α_1 aus $A_1 = \tan\alpha_1$ und α_2 aus $A_2 = \tan\alpha_2$ bestimmt. Nun ist aber $\tan\gamma = \tan(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}{1 - \tan\alpha_1 \tan\alpha_2}$, also bestimmt sich γ aus der Gleichung

$$\tan\gamma = \frac{A_1 - A_2}{1 - A_1 A_2}.$$

Die Linien sind parallel, sobald $A_1 = A_2$ ist, was $\tan\gamma = 0$ giebt. Ist dagegen der Nenner des Bruches gleich Null, d. h. $1 - A_1 A_2 = 0$ oder $A_2 = -\frac{1}{A_1}$, so wird $\tan\gamma = \infty$, d. h. $\gamma = 90^0$, und die Geraden stehen aufeinander senkrecht. Gleichungen von der Form $y = A_1 x + b_1$ und $y = -\frac{x}{A_1} + b_2$ stellen also stets Gerade dar, die aufeinander senkrecht stehen.

121) **Aufgabe.** Gegeben eine Gerade $y = Ax + b$ und ein Punkt $a_1 b_1$. Durch den letzteren eine Gerade zu legen, die auf der ersteren senkrecht steht. Wie lautet die Gleichung der gesuchten Geraden?

Auflösung. $\frac{y - b_1}{x - a_1} = -\frac{1}{A}$, oder $y - b_1 = \frac{a_1 - x}{A}$.

122) **Aufgabe.** Wo schneiden sich die beiden Geraden $a_1 x + b_1 y = c$ und $a_2 x + b_2 y = c_1$?

Auflösung. Es handelt sich um den gemeinschaftlichen Punkt der beiden Geraden, d. h. um das gemeinschaftliche x und y der beiden Gleichungen oder, was dasselbe ist, um die Bestimmung von x und y aus den beiden Gleichungen. Die Lösung ist

$$x = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \qquad y = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2}.$$

Ebenso schneiden sich die Geraden $y = A_1 x + b_1$ und $y = A_2 x + b_2$ in dem Punkte

$$x = \frac{b_2 - b_1}{A_1 - A_2}, \qquad y = \frac{A_1 b_2 - A_2 b_1}{A_1 - A_2}.$$

Digitized by Google

Die Geraden $\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} = 1$ und $\frac{x}{a_2} + \frac{y}{b_2} = 1$ schneiden sich ebenso in

$$x = \frac{a_1 a_2 (b_1 - b_2)}{a_2 b_1 - a_1 b_2}, \qquad y = \frac{b_1 b_2 (a_1 - a_2)}{b_2 a_1 - b_1 a_2}.$$

123) **Bemerkung.** Sind $a_1 x + b_1 y = c_1$ und $a_2 x + b_2 y = c_2$ die Gleichungen zweier Geraden, multipliziert man die erste beiderseits mit einem reellen Faktor m_1 und die zweite mit einem Faktor m_2, und addiert man die linken und ebenso die rechten Seiten, so entsteht eine neue Gleichung von der Form

$$x(m_1 a_1 + m_2 a_2) + y(m_1 b_1 + m_2 b_2) = m_1 c_1 + m_2 c_2.$$

Da diese Gleichung durch bloße Umformung aus den beiden ersten entstanden ist, giebt sie mit jeder derselben als Lösung dasselbe x und y, wie jene beiden. Alle drei durch die Gleichungen dargestellten Geraden gehen also durch einen Punkt. Folglich:

Hat man drei Gleichungen ersten Grades, und ist die dritte eine bloße Folge der beiden anderen, so gehen die drei durch sie dargestellten Geraden durch einen Punkt.

Gehen umgekehrt die drei Geraden durch einen Punkt, so ist die Gleichung einer jeden eine bloße Folge der Gleichungen der beiden anderen.

124) **Aufgabe.** Zu beweisen, daß die Höhen eines Dreiecks sich in einem Punkte schneiden.

Auflösung. Die Koordinaten der Eckpunkte seien a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3. Die Gleichung der Geraden, die $a_1 b_1$ gegenüberliegt, ist $\frac{y - b_3}{x - a_3} = \frac{b_3 - b_2}{a_3 - a_2} = A$, das von $a_1 b_1$ auf diese Gerade gefällte Lot hat also die Richtungskonstante $A_1 = -\frac{1}{A} = -\frac{a_3 - a_2}{b_3 - b_2}$. Seine Gleichung ist also $\frac{y - b_1}{x - a_1} = -\frac{a_3 - a_2}{b_3 - b_2}$ oder $x(a_3 - a_2) + y(b_3 - b_2) = a_1 a_3 - a_1 a_2 + b_1 b_3 - b_1 b_2$. Ebenso sind die Gleichungen der anderen Lote, wie schon Vertauschung der Indices zeigt,

$$x(a_1 - a_3) + y(b_1 - b_3) = a_2 a_1 - a_2 a_3 + b_2 b_1 - b_2 b_3$$
$$x(a_2 - a_1) + y(b_2 - b_1) = a_3 a_2 - a_3 a_1 + b_3 b_2 - b_3 b_1.$$

Da man durch Addition aus den beiden ersten Gleichungen die dritte erhält, so gehen die drei Geraden durch einen Punkt.

Digitized by Google

Bemerkung. Ebenso kann man zeigen, daß die Mittelsenkrechten, die Mittellinien und gewisse Ecktransversalen des Dreiecks sich in einem Punkte schneiden.

125) **Aufgabe.** Durch einen Punkt ab gehen die Geraden $\frac{y-b}{x-a} = A_1 = \tan\alpha_1$ und $\frac{y-b}{x-a} = A_2 = \tan\alpha_2$. Wie lautet die Gleichung der Winkelhalbierenden?

Auflösung. Ihre Neigung ist entweder $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$ (mittlere Neigung) oder $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} + 90^0$. Die Gleichung also ist $\frac{y-b}{x-a} = \tan\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$, oder $\frac{y-b}{x-a} = -\cot\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$. [Will man die Neigung mit Hülfe der A ausdrücken, so setze man $\tan\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} = \frac{\tan\frac{\alpha_1}{2}+\tan\frac{\alpha_2}{2}}{1-\tan\frac{\alpha_1}{2}\tan\frac{\alpha_2}{2}}$ und leite aus $\tan\alpha_1 = \frac{2\tan\frac{\alpha_1}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha_1}{2}}$ die Formel $\tan\frac{\alpha_1}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha_1}}{\tan\alpha_1}$ $= \frac{-1\pm\sqrt{1+A_1^2}}{A_1}$ ab, u. s. w.]

d) Die Gleichung des Kreises.

126) Ist der Kreis mit Radius $r = c$ um den Nullpunkt des Koordinatensystems geschlagen, so gilt für jeden Punkt xy des Kreises die Gleichung $x^2 + y^2 = c^2$. (Fig. 93.)

Fig. 93.

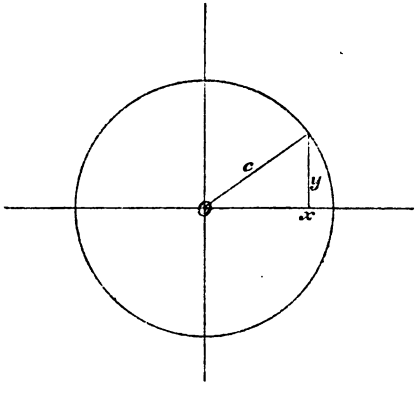
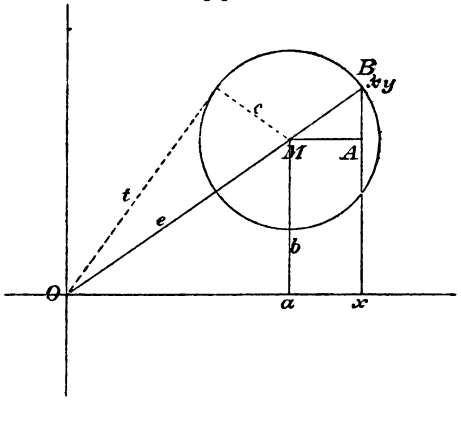


Fig. 94.



Digitized by Google

127) Ist er dagegen um einen Punkt mit den Koordinaten a, b geschlagen (Fig. 94), so folgt für jeden Punkt xy des Kreises

$$MA^2 + AB^2 = c^2,$$

oder

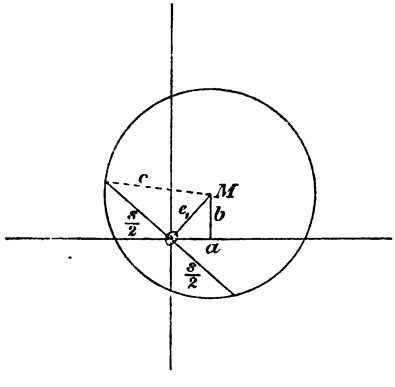
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2.$$

Schreibt man dafür

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - c^2) = 0,$$

so bedeutet der eingeklammerte konstante Ausdruck, wenn der Nullpunkt des Koordinatensystems außerhalb des Kreises liegt, das Quadrat der vom Nullpunkte aus gezogenen Tangente, denn $t^2 = e^2 - c^2 = a^2 + b^2 - c^2$. (Fig. 94.) Liegt dagegen O innerhalb des Kreises, wie in Fig. 95, so ist $a^2 + b^2 - c^2 = e_1^2 - c^2 = -\left(\frac{s}{2}\right)^2$, also gleich dem negativen Quadrate der halben kürzesten Sehne durch O. In beiden Fällen ist $a^2 + b^2 - c^2$ die früher erklärte Potenz des Nullpunktes in Bezug auf den Kreis. (Vergl. Abschnitt 87.) Bezeichnet man sie mit P_0, so kann man die Kreisgleichung auch schreiben

Fig. 95.



$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + P_0 = 0.$$

128) **Aufgabe.** Gegeben ein Kreis um den Punkt a, b mit dem Radius c und eine Gerade von der Gleichung $y = Ax + b_1$. Wo schneiden sich beide?

Auflösung. Bestimme x und y aus den Gleichungen

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - c^2 = 0,$$

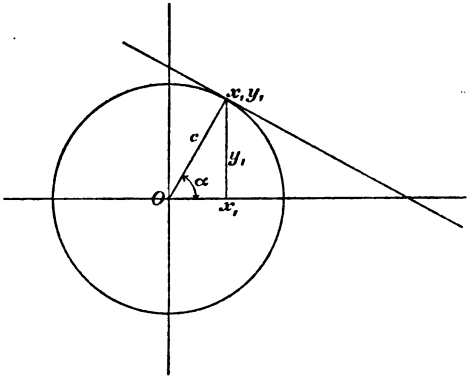
$$y = Ax + b_1.$$

Es ergeben sich zwei Werte, die entweder reell oder imaginär sind. Ausnahmsweise können sie auch in einen zusammenfallen. Dem entsprechen die Fälle des Schneidens, des Nichtschneidens und des Berührens.

Digitized by Google

129) **Aufgabe.** Wie lautet die Gleichung der Tangente in einem Punkte $x_1 y_1$ des mit Radius c um den Nullpunkt geschlagenen Kreises?

Fig. 96.



Auflösung. Der zugehörige Radius hat die Richtungskonstante

$$A = \tan\alpha = \frac{y_1}{x_1},$$

die Tangente also die Richtungskonstante

$$A_1 = -\frac{1}{A} = -\frac{x_1}{y_1}.$$

Ihre Gleichung lautet also

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{1}{A} = -\frac{x_1}{y_1},$$

oder

$$x x_1 + y y_1 = x_1^2 + y_1^2.$$

Da aber $x_1^2 + y_1^2 = c^2$ ist, so lautet die Gleichung einfacher $x x_1 + y y_1 = c^2$.

Bemerkung. Die Tangentengleichung läßt sich demnach unmittelbar aus der Kreisgleichung $x x + y y = c^2$ ableiten, indem man einem der Faktoren x und einem der y den Index 1 beilegt.

130) **Aufgabe.** Die vorige Aufgabe für einen um den Punkt $x_1 = a$, $y_1 = b$ geschlagenen Kreis.

Die vorige Methode ergiebt als Tangentengleichung

$$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = c^2,$$

was sich ebenfalls bequem mit der Kreisgleichung

$$(x - a)(x - a) + (y - b)(y - b) = c^2$$

in Beziehung setzen läßt.

131) **Aufgabe.** Wie lautet die Gleichung der Polare eines innerhalb (oder außerhalb) des Kreises $x^2 + y^2 = c^2$ liegenden Punktes $x_1 y_1$?

Auflösung. Man bilde in Fig. 97 auf dem zu $x_1 y_1$ gehörigen Radius den reciproken Punkt $x_2 y_2$. Hat der erstere die Entfernung e_1, so hat der andere die Entfernung $\frac{c^2}{e_1}$. Demnach ist $\frac{OB}{OO} = \frac{e_1}{\left(\frac{c^2}{e_1}\right)} = \frac{e_1^2}{c^2}$, und ebenso $\frac{x_1}{x_2} = \frac{e_1^2}{c^2}$, $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e_1^2}{c^2}$, also $x_2 = \frac{x_1 c^2}{e_1^2}$, $y_2 = \frac{y_1 c^2}{e_1^2}$. Der

Digitized by Google

Radius hat die Richtungskonstante $A = \frac{y_1}{x_1}$, die Polare also die Richtungskonstante $-\frac{1}{A} = -\frac{x_1}{y_1}$. Ihre Gleichung ist also

$$\frac{y - y_2}{x - x_2} = -\frac{x_1}{y_1}$$

oder

$$\frac{y - \frac{y_1 c^2}{e_1^2}}{x - \frac{x_1 c^2}{e_1^2}} = -\frac{x_1}{y_1},$$

oder

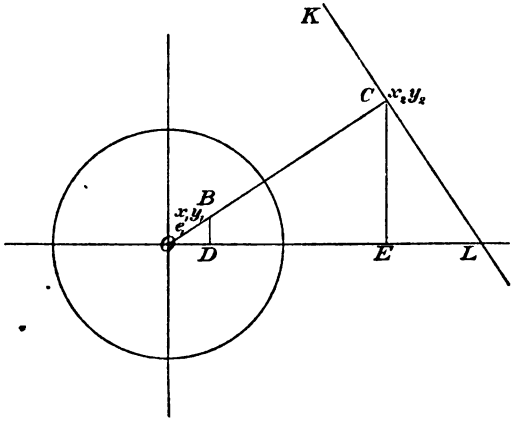
$$\frac{y e_1^2 - y_1 c^2}{x e_1^2 - x_1 c^2} = -\frac{x_1}{y_1},$$

$$y y_1 e_1^2 - y_1^2 c^2 = -x x_1 e_1^2 + x_1^2 c^2,$$

oder endlich

$$e_1^2 (x x_1 + y y_1) = c^2 (x_1^2 + y_1^2).$$

Fig. 97.



Berücksichtigt man, daß $x_1^2 + y_1^2 = e_1^2$ ist, so folgt, wie bei der Tangente, die Gleichung

$$x x_1 + y y_1 = c^2.$$

(Für den Fall, daß der Punkt außerhalb liegt, gilt dieselbe Entwickelung. Zur Übung soll unten noch eine andere gegeben werden.)

132) **Aufgabe.** Wo schneiden sich die beiden Kreise $(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = c_1^2$ und $(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = c_2^2$?

Auflösung. Die Gleichungen lassen sich schreiben

1. $$x^2 + y^2 - 2a_1 x - 2b_1 y + P_1 = 0,$$

2. $$x^2 + y^2 - 2a_2 x - 2b_2 y + P_2 = 0,$$

wo $P_1 = a_1^2 + b_1^2 - c_1^2$ und $P_2 = a_2^2 + b_2^2 - c_2^2$ ist. Durch Subtraktion erhält man die Gleichung ersten Grades

3. $$2x(a_1 - a_2) + 2y(b_1 - b_2) = P_1 - P_2.$$

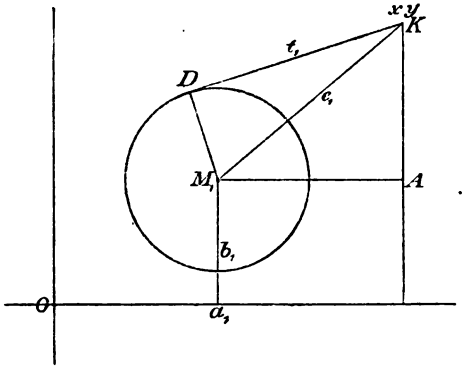
Dies ist die Gleichung einer Geraden. Da sie aber aus den beiden anderen Gleichungen abgeleitet ist, so ist die Gleichung eine durch die Schnittpunkte der Kreise gehende Gerade, d. h. die Gleichung der gemeinschaftlichen Sekante (Potenzlinie). Aus dieser Gleichung und

Digitized by Google

einer der beiden ersteren sind die Koordinaten x und y der beiden Schnittpunkte zu berechnen.

133) Was bedeutet aber Gleichung 3., wenn die Kreise sich nicht schneiden? Vermutlich wiederum die Potenzlinie, d. h. die Linie gleicher Tangenten. Die Gleichung dieser Linie bestimmt sich folgendermaßen: In Fig. 98 ist $t_1^2 = e_1^2 - c_1^2 = (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - c_1^2$.

Fig. 98.



Für den zweiten Kreis wird ebenso $t_2^2 = (x - a_2^2) + (y - b_2^2) - c_2^2$. Soll nun $t_1 = t_2$ sein, so ist

$$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2-c_2^2 = (x-a_1^2)+(y-b_1)^2 - c_1^2,$$

oder

$$x^2 + y^2 - 2a_2x - 2b_2y + (a_2^2 + b_2^2 - c_2^2) = x^2+y^2-2a_1x-2b_1y + (a_1^2 + b_1^2 - c_1^2),$$

oder nach Hebung der gleichen Glieder und bei Einführung der Beziehungen P_1 und P_2

$$2x(a_1 - a_2) + 2y(b_1 - b_2) = P_1 - P_2.$$

Demnach ist die Gleichung 3. auch im Falle des Nichtschneidens die Potenzlinie oder Linie gleicher Tangenten. Also:

Durch Subtraktion erhält man aus den Gleichungen zweier Kreise stets die Gleichung der Potenzlinie.

134) Daß die Potenzlinien dreier Kreise stets durch einen Punkt, das Potenzcentrum, gehen, ergiebt sich aus folgender Betrachtung: Sind a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 die Kreismittelpunkte und c_1, c_2, c_3 die Radien, so sind die Gleichungen der Potenzlinien:

$$2x(a_1 - a_2) + 2y(b_1 - b_2) = P_1 - P_2,$$
$$2x(a_2 - a_3) + 2y(b_2 - b_3) = P_2 - P_3,$$
$$2x(a_3 - a_1) + 2y(b_3 - b_1) = P_3 - P_1.$$

Durch Addition erhält man aus den beiden ersten Gleichungen die dritte, folglich gehen die drei Geraden durch einen Punkt.

135) **Aufgabe.** Wie lautet die Gleichung der Berührungssehne (Polare) zu einem außerhalb des Kreises $x^2 + y^2 = c^2$ liegenden Punkte x_1y_1? (Vgl. 131.)

Digitized by Google

Auflösung. Das Quadrat der Tangente ist, wie früher, $t^2 = c^2 - c^2 = x_1^2 + y_1^2 - c^2$. Der mit t um $x_1 y_1$ geschlagene Kreis hat also die Gleichung $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = t^2 = x_1^2 + y_1^2 - c^2$, oder, wenn man die Klammern ausrechnet und einiges hebt:

$$x^2 + y^2 - 2xx_1 - 2yy_1 = -c^2.$$

Der gegebene Kreis war aber

$$x^2 + y^2 = c^2,$$

durch Subtraktion erhält man die Gleichung der gemeinschaftlichen Sehne beider Kreise, d. h. die der gesuchten Berührungssehne, also $2xx_1 + 2yy_1 = 2c^2$, oder, wie oben

$$xx_1 + yy_1 = c^2.$$

136) **Bemerkung.** Sämtliche Punkte der senkrechten Geraden $x_1 = a$ haben, wenn y_n die wechselnde Ordinate bedeutet, in Bezug auf den untersuchten Kreis Polaren von der Gleichung

$$xa + yy_n = c^2.$$

Setzt man hier $y = 0$, so wird $xa = c^2$ oder $x = \frac{c^2}{a}$. Folglich: Die Polaren sämtlicher Punkte der Geraden $x_1 = a$ gehen durch den reciproken Punkt $x_2 = \frac{c^2}{a}$. (Was geometrisch von dieser Geraden gilt, gilt von sämtlichen Geraden.)

137) **Aufgabe.** Wie lautet die Gleichung der Polare zu einem Punkte $x_1 y_1$ in Bezug auf den Kreis $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$?

Die nach obiger Methode auszuführende Rechnung führt auf die Gleichung

$$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = c^2,$$

die wieder in einfacher Beziehung zur Kreisgleichung

$$(x - a)(x - a) + (y - b)(y - b) = c^2$$

steht.

Das Gegebene reicht hin, eine große Zahl der früher behandelten Sätze über Gerade und Kreise mit Hülfe der Koordinatenlehre zu beweisen und entsprechende Aufgaben durch Rechnung zur Lösung zu bringen, besonders auch solche der neueren Geometrie.

Digitized by Google

Zweite Abteilung.

Arithmetik.

I. Geometrische Reihen.

a) Die geometrische Reihe mit endlicher Gliederzahl.

1) In einer Zahlenreihe können die Glieder nach einem bestimmten Gesetze auf einander folgen. Hat man an den ersten Gliedern das Gesetz erkannt, so kann man sämtliche folgenden mit Leichtigkeit bilden. In der Reihe

$$1, 2, 4, 8, 16, \ldots.$$

ist z. B. jedes Glied das Doppelte des vorhergehenden, dagegen in der Reihe

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots.$$

jedes Glied die Hälfte des vorhergehenden. Bilde in ähnlicher Weise von 1 ausgehende Reihen, in denen jedes Glied das dreifache, vierfache, u. s. w. oder der dritte, vierte Teil u. s. w. des vorhergehenden ist. Bei den so gebildeten Reihen ist der Quotient je zweier auf einander folgenden Glieder eine konstante (unveränderliche) Größe.

Reihen, bei denen der Quotient je zweier auf einander folgenden Glieder eine konstante Größe ist, werden geometrische Reihen genannt.

2) Ist a das Anfangsglied und e der Quotient jedes Gliedes und des vorhergehenden, so ist, wenn n Glieder vorhanden sind, die Form der geometrischen Reihe die folgende:

$$a, ae, ae^2, ae^3, \ldots. ae^{n-2}, ae^{n-1}.$$

Digitized by Google

Kennt man die beiden ersten Glieder einer geometrischen Reihe, so kann man sämtliche Glieder bilden und das n^{te} Glied (das allgemeine Glied) hinschreiben, ohne den speciellen Wert der ganzen Zahl n zu kennen. Seine Form ist

1) $$t = ae^{n-1}.$$

3) Eine Hauptaufgabe besteht darin, die Summe s der n ersten Glieder zu bilden, ohne die ganze Zahl n zu kennen. Zu diesem Zwecke setzt man*)

$$s = a + ae + ae^2 + ae^3 + \cdots + ae^{n-1},$$

bildet durch beiderseitige Multiplikation mit e die Gleichung

$$es = ae + ae^2 + ae^3 + \cdots + ae^{n-1} + ae^n$$

und findet durch beiderseitige Subtraktion, bei der rechts alle Glieder bis auf zwei wegfallen,

$$es - s = ae^n - a,$$

oder

$$s(e-1) = a(e^n - 1).$$

Demnach ist die Summe der geometrischen Reihe bis zum n^{ten} Gliede:

2) $$s = a\frac{e^n - 1}{e - 1} = a\frac{1 - e^n}{1 - e}.$$

Ordnet man beiderseits nach steigenden bezw. fallenden Potenzen von e, so gelten die Gleichungen

3) $$\begin{cases} a + ae + ae^2 + \cdots + ae^{n-1} = a\dfrac{1 - e^n}{1 - e}, \\ ae^{n-1} + ae^{n-2} + \cdots + ae + a = a\dfrac{e^n - 1}{e - 1}. \end{cases}$$

Dividiert man beiderseits durch a, so erhält man die einfacheren Formeln

4) $$\begin{cases} 1 + e + e^2 + \cdots + e^{n-1} = \dfrac{1 - e^n}{1 - e}, \\ e^{n-1} + e^{n-2} + \cdots + e + 1 = \dfrac{e^n - 1}{e - 1}. \end{cases}$$

4) Eine Probe für die Richtigkeit dieser Summenformeln kann man machen, indem man rechts und links mit $1 - e$ bezw. $e - 1$

*) In der Regel wird die so geschriebene Summe als die geometrische Reihe bezeichnet.

Digitized by Google

multipliziert. Eine zweite Probe besteht in der Ausführung der auf der rechten Seite angedeuteten Division, z. B.

$$\begin{array}{l} 1-e^4 : 1-e = 1+e+e^2+e^3 \\ \underline{1-e} \\ \quad e-e^4 \\ \quad \underline{e-e^2} \\ \quad\quad e^2-e^4 \\ \quad\quad \underline{e^2-e^3} \\ \quad\quad\quad e^3-e^4 \\ \quad\quad\quad \underline{e^3-e^4} \end{array} \qquad \begin{array}{l} e^4-1 : e-1 = e^3+e^2+e+1 \\ \underline{e^4-e^3} \\ \quad e^3-1 \\ \quad \underline{e^3-e^2} \\ \quad\quad e^2-1 \\ \quad\quad \underline{e^2-e} \\ \quad\quad\quad e-1 \\ \quad\quad\quad \underline{e-1} \end{array}$$

5) In der Kunst, ohne Kenntnis der ganzen Zahl n die Summe der n ersten Glieder einer geometrischen Reihe zu bilden, liegt bei größerer Gliederzahl eine ganz außerordentliche Erleichterung des Rechnens.

Aufgabe. Die Summe der 17 ersten durch wiederholte Verdoppelung entstehenden Zahlen zu bilden:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \cdots + 65\,536.$$

Auflösung. Es handelt sich um.

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + \cdots + 2^{16} = \frac{2^{17}-1}{2-1}$$

$$= \frac{131\,072-1}{2-1} = 131\,071.$$

[Hierher gehört z. B. die Aufgabe des Sessa Ebn Daher, der als Lohn für die Erfindung des Schachspiels vom König Shehram forderte, auf die 64 Felder des Schachbrettes der Reihe nach 1, 2, 4, 8, u. s. w. Weizenkörner zu legen und sie ihm zu schenken. Man findet als Resultat $\frac{2^{64}-1}{2-1} = 2^{64} - 1$. Nach vorigem Beispiele ist $2^{16} = 65.536$, also $2^{64} = (65\,536 \cdot 65\,536)^2$. Die Rechnung ergiebt als geforderte Summe

18 446744 073709 551615 Körner,

mit denen man die gesamte Erdoberfläche etwas mehr als 1 cm hoch bedecken könnte, so daß auf der ganzen Erde nicht soviel Weizen existiert, wie gefordert wurde.]

6) Setzt man in Gleichung 4) $e = \frac{y}{x}$, so erhält man

$$1 + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} + \cdots + \frac{y^{n-1}}{x^{n-1}} = \frac{1-\frac{y^n}{x^n}}{1-\frac{y}{x}} = \frac{x^n-y^n}{x^{n-1}(x-y)},$$

Digitized by Google

oder, wenn man beiderseits mit x^{n-1} multipliziert,

$$5)\quad x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}=\frac{x^n-y^n}{x-y}.$$

Hierin sind zahlreiche Spezialformeln enthalten, die häufig als Beispiele für aufgehende Division Verwendung finden, z. B.

$$\frac{x^3-y^3}{x-y}=x^2+xy+y^2,$$

$$\frac{x^4-y^4}{x-y}=x^3+x^2y+xy^2+y^3.$$

Setzt man in 5) $-y$ statt y ein, so bleibt der Zähler der rechten Seite bei geradem n ungeändert, ändert sich aber bei ungeradem n, auf der anderen aber entstehen abwechselnde Vorzeichen, z. B.

$$\frac{x^3+y^3}{x+y}=x^2-xy+y^2,$$

$$\frac{x^4-y^4}{x+y}=x^3-x^2y+xy^2-x^3,$$

$$\frac{x^5+y^5}{x+y}=x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+x^4.$$

Bemerkung. Jedes Glied der geometrischen Reihe ist mittlere Proportionale zwischen den beiden Nachbargliedern. Durch Einschaltung mittlerer Proportionalen läßt sich also aus jeder solchen Reihe eine neue ableiten, aus dieser eine dritte u. s. w.

b) Anwendung auf die Rentenrechnung.

7) **Aufgabe.** Jemand legt am Schlusse jedes Jahres eine Ersparnis von r Mark zinsbar an und schlägt jedesmal die Zinsen zum Kapital. Wieviel besitzt er nach n Jahren?

Auflösung. Wird der Prozentsatz mit dem Zeichen % bezeichnet, so hat der erste Posten r nach n Jahren den Wert $r\left(1+\frac{\%}{100}\right)^{n-1}$, denn er war $n-1$ Jahre lang zinsbar angelegt. (Vergl. Teil I, Arithmetik Nr. 112.) Der zweite Posten hat nach n Jahren den Wert $r\left(1+\frac{\%}{100}\right)^{n-2}$, u. s. w. Die Summe der Schlußwerte der einzelnen Posten ist also nach n Jahren:

$$r\left(1+\tfrac{\%}{100}\right)^{n-1}+r\left(1+\tfrac{\%}{100}\right)^{n-2}+r\left(1+\tfrac{\%}{100}\right)^{n-3}+\cdots+r\left(1+\tfrac{\%}{100}\right)+r,$$

oder nach Gleichung 3)

$$r\,\frac{\left(1+\frac{\%}{100}\right)^n-1}{\left(1+\frac{\%}{100}\right)-1},$$

Digitized by Google

also, wenn man den Schlußwert mit k bezeichnet und eine einfache Umformung vornimmt:

6) $$k = \frac{100r}{\%}\left[\left(1 + \frac{\%}{100}\right)^n - 1\right].$$

Bezeichnet man jeden Einzelposten als die jährliche Rente (oder Rate), so hat man in 6) den Wert gefunden, den eine auf n Jahre zu zahlende jährliche Rente r nach n Jahren hat. Er heißt der Schlußwert der Rente. Die Formel ist wichtig für die Berechnung der Lebensversicherung. Ist n die mittlere Lebensdauer der sich heute versichernden Person, und zahlt sie jährlich r Mark, so ist k die nach dem Tode zurück zu zahlende Summe. Ähnlich ist es bei der Feuerversicherung von Gebäuden, z. B. Theatern, bei denen eine mittlere Dauer des Bestehens auf Grund der Statistik angenommen wird.

8) **Aufgabe.** Jemand will bei gegebenem Zinsfuß auf n Jahre eine an jedem Jahresschluß zu zahlende Rente r kaufen. Wie groß ist der Zahlungspreis c?

Auflösung. Der Kaufpreis c würde nach n Jahren den Wert $k = c\left(1 + \frac{\%}{100}\right)^n$ haben, die Rente bei gleichem Zinsfuß den Wert $k = \frac{100r}{\%}\left[\left(1 + \frac{\%}{100}\right) - 1\right]$. Beide Schlußwerte müssen gleich sein, also

7) $$c\left(1 + \frac{\%}{100}\right)^n = \frac{100r}{\%}\left[\left(1 + \frac{\%}{100}\right)^n - 1\right].$$

Demnach ist der Kaufpreis (oder Anfangswert) der Rente

7*) $$c = \frac{100r}{\%}\left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{\%}{100}\right)^n}\right] = \frac{100r}{\%}\left[1 - \left(\frac{100}{100 + \%}\right)^n\right].$$

Hierher gehört die Ablösung von Renten durch eine Barzahlung.

9) **Aufgabe.** Welche Rente r kann man bei gegebenem Zinsfuß auf n Jahre für einen Kaufpreis c kaufen?

Auflösung. Aus der Schlußgleichung von 8) folgt

8) $$r = \frac{c \cdot \%}{100\left[1 - \left(\frac{100}{100 + \%}\right)^n\right]}.$$

10) **Aufgabe.** Auf wie viele Jahre kann man bei gegebenem Zinsfuß eine jährliche Rente r für einen Kaufpreis c erwerben?

Digitized by Google

Auflösung. Aus der Schlußgleichung von 8) folgt

$$\left(\frac{1}{1+\frac{\%}{100}}\right)^n = 1 - \frac{c\,\frac{\%}{100}}{r} = \frac{r - c\,\frac{\%}{100}}{r},$$

oder

$$\left(1+\frac{\%}{100}\right)^n = \frac{r}{r - c\,\frac{\%}{100}}.$$

Beiderseitiges Logarithmieren giebt

$$n \lg\left(1+\frac{\%}{100}\right) = \lg r - \lg\left(r - \frac{c\,\%}{100}\right),$$

also ist die Anzahl der Jahre

$$9) \qquad n = \frac{\lg r - \lg\left(r - \frac{c\,\%}{100}\right)}{\lg\left(1+\frac{\%}{100}\right)}.$$

Im allgemeinen erhält man kein ganzzahliges n, obwohl der Ausgangspunkt der Betrachtung ein solches angenommen hat. Über den überschießenden Bruchteil ist dann besondere Vereinbarung zu treffen.

11) **Bemerkung.** Die Berechnung des Prozentsatzes könnte folgendermaßen eingeleitet werden. Man setze $1 + \frac{\%}{100} = x$, also $\frac{\%}{100} = x - 1$, dann geht Gleichung 7) über in

$$10) \quad cx^n = \frac{r}{x-1}(x^n - 1) = r\,[x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1].$$

Es handelt sich also um die Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades $cx^n(x-1) = r(x^n - 1)$, oder um die Gleichung n^{ten} Grades $cx^n = r\,[x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1]$. Sobald also n größer als 2 (bezw. 3 oder 4) ist, übersteigt die Aufgabe den Standpunkt der Schule. Renten auf so geringe Anzahl von Jahren zu berechnen, ist aber ohne praktische Bedeutung.

12) **Aufgabe.** Jemand hat c Mark Vermögen, legt es zinsbar an und legt jährlich r Mark Ersparnisse dazu. Wieviel besitzt er nach n Jahren?

Auflösung. 11) $k = c\left(1+\frac{\%}{100}\right)^n + \frac{100r}{\%}\left[\left(1+\frac{\%}{100}\right)^n - 1\right]$

$$= \left(1+\frac{\%}{100}\right)^n \left(c + \frac{100r}{\%}\right) - \frac{100r}{\%}.$$

Digitized by Google

Aufgabe. Berechne aus der letzten Formel r bezw. n und kleide diese neuen Aufgaben in Worte ein.

Aufgabe. Jemand hat c Mark Vermögen, legt es zinsbar an und nimmt jährlich r Mark davon. Wieviel hat er nach n Jahren?

Auflösung. Man hat nur nötig, in Formel 11) die Rente r negativ einzusetzen.

Bemerkung. Sagt man in dieser Aufgabe Schulden statt Vermögen, so handelt es sich um die ratenweise Tilgung einer Schuld nebst Zinsen und Zinseszinsen. Man kann den Schuldenbestand für jedes beliebige Jahr berechnen. Setzt man in Formel 12) $k = 0$, so kommt man auf die Formeln 7), 8), 9) und 10) zurück und erhält die sogenannte Amortisationsberechnung.

13) **Aufgabe.** Eine Rente r sei auf m Jahre zu beziehen. Welches ist der mittlere Zahlungstermin? (Der Termin für die Zahlung des Kapitals rm.)

Auflösung. Setze die Schlußwerte gleich, also

$$12) \qquad rm\left(1+\tfrac{\%}{100}\right)^{m-n} = \frac{100r}{\%}\left[\left(1+\tfrac{\%}{100}\right)^{m}-1\right]$$

und berechne daraus n.

Ebenso kann man die Werte der Barzahlung und der Rente auf den Anfangstermin zurückführen.

Bemerkungen. Übungsaufgaben befinden sich in den bekannteren Sammlungen, z. B. bei Heis. Auf die Bedeutung dieses Kapitels für das gesamte Versicherungs- und Rentenwesen, für die Waldwirtschaft, für das Schuldenwesen der Staaten und Städte, für das Sparkassenwesen und sonstige volkswirtschaftliche Gebiete sei noch besonders hingewiesen. — Die obigen Aufgaben lassen sich durch Einführung von halbjährlichen, vierteljährlichen, monatlichen Rentenzahlungen noch vielfach umwandeln.

c) Die geometrischen Reihen mit unendlich großer Gliederzahl.

14) Ist in der Reihe

$$1 + e + e^2 + e^3 + \cdots + e^{n-1} = \frac{1-e^n}{1-e} = \frac{e^n-1}{e-1}$$

$e > 1$ oder $e < -1$ so schwellen die Glieder bei unendlich großem n zu unendlicher Größe an und auch die Summe wird unendlich groß, weil auf der rechten Seite e^n unendlich groß ist. Die Reihe kann dann nicht summiert werden.

Digitized by Google

Ist hingegen $-1 < e < +1$, so nehmen bei unendlich großer Gliederzahl die einzelnen Glieder allmählich bis zu unendlicher Kleinheit ab, d. h. man kann sie beliebig nahe an Null bringen, man darf sogar e^{n-1} und ebenso e^n für $n = \infty$ gleich Null setzen. Dann ergiebt sich bei Fortsetzung der Reihe bis ins Unendliche

13) $1 + e + e^2 + e^3 + \cdots = \frac{1}{1-e}$, für $-1 < e < 1$.

So ist z. B.

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Letzteres läßt sich folgendermaßen veranschaulichen: Man schneide von der Geraden von Länge 2 das Stück 1 ab, vom Reste 1 das Stück $\frac{1}{2}$, vom Reste $\frac{1}{2}$ das Stück $\frac{1}{4}$, vom Reste $\frac{1}{4}$ das Stück $\frac{1}{8}$ u. s. w. Da der Rest bei fortgesetztem Halbieren sich allmählich der Null nähert, so erkennt man die Richtigkeit der letzten Gleichung auf geometrischem Wege.

Wollte man dagegen in Gleichung 13 den Wert $e = 2$ einführen, der größer als 1 ist, so würde man ganz Falsches erhalten, nämlich

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = \frac{1}{1-2} = -1,$$

links also hätte man Positives von unendlicher Größe, rechts einen negativen endlichen Wert.

Den eigentlichen Grund für das Nichtgelten der Gleichung in solchen Fällen erkennt man bei der Ausführung der auf der rechten Seite von 13) stehenden Division. Es ist z. B.

$$1 : (1-e) = 1 + e + e^2 + e^3 + \frac{e^4}{1-e}.$$

$$\begin{array}{l} \underline{1-e} \\ \quad e \\ \quad \underline{e-e^2} \\ \quad\quad e^2 \\ \quad\quad \underline{e^2-e^3} \\ \quad\quad\quad e^3 \\ \quad\quad\quad \underline{e^3-e^4} \\ \quad\quad\quad\quad e^4 \end{array}$$

D. h. bricht man bei dem Reste e^4 mit der Division ab, so muß dieser Rest noch durch $1-e$ dividiert werden, und man erhält das Restglied $\frac{e^4}{1-e}$.

Die dabei entstehende Gleichung

$$1 + e + e^2 + e^3 + \cdots + e^{n-1} + \frac{e^n}{1-e} = \frac{1}{1-e}$$

hat unbeschränkte Geltung, sie gilt also auch für den Wert $e = 2$. Ist nun e absolut größer als 1, so ist $\frac{e^n}{1-e}$ eine Größe, deren absoluter

Digitized by Google

Betrag um so größer ist, je größer man n nimmt. Sie darf also nicht vernachlässigt werden. Ist dagegen $-1 < e < +1$, so ist der absolute Betrag des Restes e^n und ebenso des Restgliedes $\frac{e^n}{1-e}$ für unendlich großes n verschwindend klein, und der Rest kann vernachlässigt werden. Unendliche Reihen, die summiert werden können, werden als konvergent bezeichnet, womit gesagt werden soll, daß die Summe einem bestimmten Grenzwerte um so näher kommt, je mehr Glieder man summiert hat. Die Konvergenz ist in den meisten Fällen an bestimmte Bedingungen geknüpft.

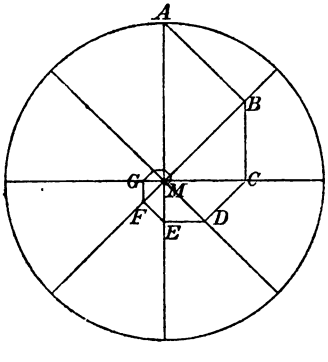
15) **Aufgabe.** Es sei der absolute Betrag von b kleiner als der von a. Welches ist die Summe der mit a und b beginnenden geometrischen Reihe?

Auflösung. Die Summe der Reihe ist

$$a + b + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} + \cdots = a\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} + \cdots\right)$$

$$= a\frac{1}{1 - \frac{b}{a}} = \frac{a^2}{a - b}.$$

Fig. 99.



16) **Aufgabe.** Der Kreis in Fig. 99 sei in Sektoren mit dem Centriwinkel 45^0 eingeteilt. Von A aus ist auf den benachbarten Radius das Lot AB gefällt, von B aus auf den folgenden Radius das Lot BC, von C aus auf den nächsten das Lot CD u. s. w. Wie lang ist die gebrochene Linie $ABCDEFG\ldots$, wenn man mit dieser Konstruktion bis ins Unendliche fortfährt und der Radius des Kreises $r = \sqrt{2}$ ist?

Auflösung. Die Lote bilden die geometrische Reihe

$$1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}} + \left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)^3 + \cdots$$

$$= \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{1 + \sqrt{\frac{1}{2}}}{\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)} = \frac{1 + \sqrt{\frac{1}{2}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right).$$

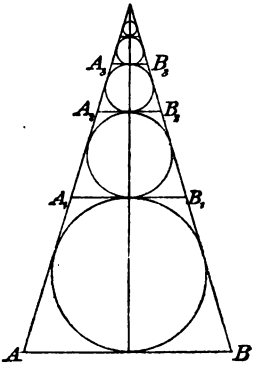
$$= 2 + \sqrt{2}$$

Digitized by Google

[Aufgaben dieser Art kann man zum Ausgangspunkt für die Berechnung gewisser Spiralen machen. Halbierung jedes Centriwinkels und Einschaltung der mittleren Proportionale je zweier benachbarter Radien führt bei mehrfacher Wiederholung allmählich auf diese Kurven.]

[17) **Aufgabe.** In ein gleichschenkliges Dreieck von Grundlinie a und Höhe h sei nach Art von Figur 100 eine Reihe von Berührungskreisen einbeschrieben, die sich nach der Spitze hin ins Unendlichkleine fortsetzt. a) Wie lautet die Reihe der Radien? b) Wie groß ist die Summe sämtlicher Kreisperipherieen? c) Wie groß ist die Summe sämtlicher Kreisflächen? d) Wie groß ist die Summe des Inhalts sämtlicher Kugeln, die durch Umdrehung der Figur um die Höhe h entstehen?

Fig. 100.



Auflösung. a) Ist ϱ der Radius des größten der Berührungskreise und u der Umfang des Dreiecks, so ist zunächst $\varrho u = ah$, also $\varrho = \frac{ah}{u}$, wo $u = a + 2\sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2} = a + \sqrt{a^2 + 4h^2}$, so daß $\varrho = \frac{ah}{a + \sqrt{a^2 + 4h^2}}$ ist. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und A_1B_1C folgt $\varrho_1 : \varrho = h - 2\varrho : h$, also $\varrho_1 = \varrho\frac{h - 2\varrho}{h}$. Die Reihe der Radien ist also

$$\varrho,\quad \varrho\frac{h-2\varrho}{h},\quad \varrho\left(\frac{h-2\varrho}{h}\right)^2,\quad \varrho\left(\frac{h-2\varrho}{h}\right)^3,\quad \cdots$$

(Die doppelte Summe dieser Reihe giebt natürlich h.)

b) Die Summe der Kreisperipherieen ist

$$2\varrho\pi\left[1 + \frac{h-2\varrho}{h} + \left(\frac{h-2\varrho}{h}\right)^2 + \cdots\right]$$
$$= 2\varrho\pi\frac{1}{1 - \frac{h-2\varrho}{h}} = 2\varrho\pi\frac{h}{2\varrho} = \pi h.$$

Dieses einfache Resultat läßt sich auch unmittelbar aus der Anschauung ableiten.

c) Die Summe der Kreisflächen ist

Digitized by Google

$$\varrho^2\pi\left[1+\left(\frac{h-2\varrho}{h}\right)^2+\left(\frac{h-2\varrho}{h}\right)^4+\cdots\right]=\varrho^2\pi\frac{1}{1-\left(\frac{h-2\varrho}{h}\right)^2}$$

$$=\frac{\pi\varrho^2h^2}{4(\varrho h-\varrho^2)}=\frac{\pi\varrho h^2}{4(h-\varrho)}=\frac{\pi h^2}{4\left(\frac{h}{\varrho}-1\right)}=\frac{\pi h^2}{4\left(\frac{u}{a}-1\right)}=\frac{a\pi h^2}{4(u-a)}$$

$$=\frac{a\pi h^2}{4\sqrt{a^2+4h^2}},\text{ oder das }\frac{\pi h}{2\sqrt{a^2+4h^2}}\text{-fache des Dreiecksinhalts.}$$

(Die Summe der Kugeloberflächen ist viermal so groß.)

d) Die Summe der Inhalte sämtlicher Kugeln ist

$$\tfrac{4}{3}\varrho^3\pi\left[1+\left(\frac{h-2\varrho}{h}\right)^3+\left(\frac{h-2\varrho}{h}\right)^6+\cdots\right]=\tfrac{4}{3}\varrho^3\pi\frac{1}{1-\left(\frac{h-2\varrho}{h}\right)^3}$$

$$=\tfrac{4}{3}\varrho^3\pi\frac{h^3}{h^3-(h^3-6h^2\varrho+12h\varrho^2-8\varrho^3)}=\frac{2\varrho^2\pi h^3}{3(3h^2-6h\varrho+4\varrho^2)}$$

$$=\frac{2\pi h^3}{3\left[3\left(\frac{h}{\varrho}\right)^2-6\left(\frac{h}{\varrho}\right)+4\right]}=\frac{2\pi h^3}{3\left[3\left(\frac{u}{a}\right)^2-6\left(\frac{u}{a}\right)+4\right]}$$

$$=\frac{2a^2\pi h^3}{3\,[3u^2-6ua+4a^2]}.$$

Setzt man hier $u=a+\sqrt{a^2+4h^2}$, so ergiebt sich die Summe der Kugeln als $\frac{a^2\pi h^3}{6(a^2+3h^2)}$, oder das $\frac{2h^2}{(a^2+3h^2)}$-fache des Kegelinhalts.

18) **Aufgabe.** In ein gleichseitiges Dreieck von Seite a sei der In-Kreis eingezeichnet. Nach den drei Ecken hin seien nach Art der vorigen Aufgabe Reihen von Berührungskreisen eingetragen. Wie groß ist die Summe der sämtlichen Kreisflächen?

Auflösung. Nach Art der vorigen Aufgabe erhält man als Summe der Kreisflächen $s=\frac{11}{96}a^2\pi$, oder das $\frac{11\pi}{24\sqrt{3}}$-fache des Dreiecksinhalts. (Die größte Kugel nur einmal einzurechnen!)

19) **Aufgabe.** Wie groß ist die Summe der Inhalte sämtlicher Kugeln, die sich in entsprechender Weise in das regelmäßige Tetraeder einbeschreiben lassen?

Auflösung. Auf ähnlichem Wege, wie vorher, erhält man

$$s=\tfrac{11}{1512}a^3\pi\sqrt{6}.$$

Digitized by Google

20) **Bemerkung.** Hier läßt sich eine ganze Reihe geometrischer und stereometrischer Übungsaufgaben anschließen, z. B. die Summe der Inhalte sämtlicher Quadrate zu berechnen, die sich in einem gleichschenkligen Dreiecke von der Basis aus so übereinander setzen lassen, daß ihre oberen Ecken in die Schenkel fallen. $\left(s = a\frac{h^2}{a+2h}.\right)$ Dieselbe Aufgabe für Rechtecke, deren Höhe sich zur Grundlinie verhält wie 1 : 2. $\left(s = \frac{a^2h^2}{(a+3h)(a+h)}.\right)$ Ein senkrechter Kreiskegel habe als Durchmesser des Grundkreises die Gerade a und die Höhe h. In ihm läßt sich eine Reihe von Kreiscylindern quadratischen Querschnitts übereinander setzen. Wie groß ist die Summe der Inhalte? $\left(s = \frac{a^2h^2\pi}{4(a^2+3ah+3h^2)}.\right)$ Eine senkrechte quadratische Pyramide habe die Höhe h und die Grundkante a. In ihr läßt sich eine Reihe von Berührungskugeln übereinander setzen. Wie groß ist die Summe ihrer Inhalte? $\left(s = \frac{a^2\pi h^3}{6(a^2+3h^2)},\right.$ wie in einer der obigen Aufgaben.) Dieselbe Aufgabe für die dreiseitige Pyramide von Grundkante a und Höhe h. $\left(s = \frac{a^2\pi h^3}{6(a^2+9h^2)}.\right)$ Dieselbe Aufgabe für die n-seitige senkrechte Pyramide mit regelmäßiger Grundfläche. [In einen senkrechten Kreiskegel eine entsprechende Reihe n-seitiger Prismen mit quadratischen Seitenflächen einzuschreiben. — Aufgaben dieser Art haben allerdings keinen größeren praktischen Wert, zeichnen sich aber durch einen reicheren Gedankeninhalt aus, als die sonst üblichen. Arithmetische Aufgaben findet man z. B. in der Sammlung von Heis.]

II. Arithmetische Reihen.

a) Arithmetische Reihen erster Ordnung.

21) Die Glieder einer Zahlenreihe können auch so aufeinander folgen, daß der Unterschied zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Gliedern konstant ist, wie z. B. in

5, 7, 9, 11, 13, ...,

dann nennt man die Reihe eine arithmetische Reihe.

Digitized by Google

Ist a das Anfangsglied, n die Anzahl der Glieder und d die konstante Differenz, so lautet die Reihe folgendermaßen:

$$a,\quad a+d,\quad a+2d,\quad a+3d,\quad \ldots,\quad a+(n-1)d.$$

Das n^{te} Glied hat also, auch wenn es nicht Schlußglied ist, die Form

$$t = a + (n-1)d.$$

22) Die Summe der arithmetischen Reihe kann man finden, indem man sie zweimal in entgegengesetzter Ordnung hinschreibt, also z. B.

$$s = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (t-d) + t,$$
$$s = t + (t-d) + (t-2d) + \cdots + (a+d) + a.$$

Durch beiderseitige Addition erhält man

$$2s = (a+t) + (a+t) + (a+t) \cdots + (a+t) + (a+t)$$

oder

$$2s = n(a+t),$$

demnach ist

$$s = \frac{n}{2}(a+t) = \frac{n}{2}[a + a + (n-1)d] = na + \frac{n(n-1)}{2}d.$$

Dasselbe Resultat findet man durch folgende Überlegung: Der mittlere Wert des ersten und des letzten Gliedes ist $\frac{a+t}{2}$, der des zweiten und des vorletzten Gliedes ebenfalls $\frac{a+t}{2}$ u. s. w., $\frac{a+t}{2}$ ist also überhaupt das arithmetische Mittel sämtlicher Glieder. Die Summe der Reihe muß demnach $n\,\frac{a+t}{2}$ sein.

23) **Übungsaufgaben.** Wie groß ist die Summe der n ersten Zahlen der gewöhnlichen Zahlenreihe?

$\left[s = \frac{n(n+1)}{2};\ \text{z. B. } 1+2+3+\cdots+199 = \frac{199\cdot 200}{2} = 19900.\right]$

Wie groß ist die Summe der n ersten ungeraden Zahlen?

$[s = 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n\frac{1+(2n-1)}{2} = n\cdot\frac{2n}{2} = n^2,$

also stets eine Quadratzahl, z. B. $1+3+5+\cdots+11 = 36 = 6^2.$]

Wie groß ist die Summe der Zahlen von 101 bis 200?

[Gliederzahl $n = 100$, also $s = \frac{n}{2}(a+t) = \frac{100}{2}(101+200)$ $= 50\cdot 301 = 15\,050.$]

Digitized by Google

Wie groß ist die Summe der geraden Zahlen von 102 bis 200? [Gliederzahl $n = 50$, also $s = \frac{50}{2}(102 + 200) = 25 \cdot 302 = 7550$.]

Weitere Übungsaufgaben siehe z. B. in der Sammlung von Heis.

b) Einige arithmetische Reihen höherer Ordnung.

24) **Aufgabe.** Weise nach, daß jede der folgenden Gleichungen eine **identische** ist.

a) $$\frac{x(x+1)}{1 \cdot 2} - \frac{(x-1)x}{1 \cdot 2} = \frac{x}{1},$$

b) $$\frac{x(x+1)(x+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{(x-1)x(x+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{x(x+1)}{1 \cdot 2},$$

c) $$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{(x-1)x(x+1)(x+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{x(x+1)(x+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Bemerkung. Fährt man mit der Bildung dieser Gleichungen fort, so lautet die m^{te} folgendermaßen:

d) $$\frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m+1)} - \frac{(x-1)x(x+1)\cdots(x+m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m+1)} = \frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m}.$$

Diese Gleichung wird als identisch nachgewiesen, indem man links den gemeinschaftlichen Faktor absondert. Dies giebt

$$\frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m(m+1)}[(x+m) - (x-1)].$$

Hier ist $[x + m - (x - 1)] = (m + 1)$, was sich gegen den Faktor $(m + 1)$ im Nenner hebt, so daß links die rechte Seite stehen bleibt.

Die rechte Seite jeder dieser Gleichungen ist gleich dem Anfangsgliede auf der linken Seite der vorhergehenden Gleichung. Das Gesetz ist also leicht in Worten wiederzugeben.

Aus diesen Gleichungen lassen sich gewisse Reihensummierungen ableiten, die als Vorbereitung für den wichtigen binomischen Lehrsatz zu betrachten sind.

25) Setzt man in der identischen Gleichung $\frac{x(x+1)}{1 \cdot 2} - \frac{(x-1)x}{1 \cdot 2} = \frac{x}{1}$ für x der Reihe nach die ganzzahligen Werte 1, 2, 3, ..., n ein, so erhält man folgendes System von Gleichungen:

Digitized by Google

$$\frac{1\cdot 2}{1\cdot 2} - \frac{0\cdot 1}{1\cdot 2} = 1$$

$$\frac{2\cdot 3}{1\cdot 2} - \frac{1\cdot 2}{1\cdot 2} = 2$$

$$\frac{3\cdot 4}{1\cdot 2} - \frac{2\cdot 3}{1\cdot 2} = 3$$

$$\vdots$$

$$\frac{(n-1)n}{1\cdot 2} - \frac{(n-2)(n+1)}{1\cdot 2} = n-1$$

$$\frac{n(n+1)}{1\cdot 2} - \frac{(n-1)n}{1\cdot 2} = n.$$

Durch Addition der drei Kolonnen, bei der sich jedoch in je zwei aufeinander folgenden Gleichungen gleiche Glieder entgegengesetzten Vorzeichens wegheben, entsteht folgende bereits bekannte Gleichung

$$\frac{n(n+1)}{1\cdot 2} = 1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

26) Verfährt man ebenso mit den identischen Gleichungen b) c) und d), so erhält man die Formeln:

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{1\cdot 2}{1\cdot 2} + \frac{2\cdot 3}{1\cdot 2} + \frac{3\cdot 4}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2},$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3},$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}.$$

Und so kann man weiter fortfahren.

27) Vertauscht man in diesen Gleichungen die rechten und linken Seiten, und rechnet man die Anfangsglieder aus, so erhält man, von unten anfangend, folgende Gleichungen:

$$1 + 5 + 15 + 35 + 70 + 126 + \cdots + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5},$$

$$1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 + \cdots + \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},$$

Digitized by Google

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + \cdots + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots + \frac{n}{1} = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2},$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = \frac{n}{1}.$$

Die Summe jeder dieser Reihen ist gleich dem n^{ten} Gliede der vorhergehenden Reihe. Die Differenz je zweier auf einander folgenden Glieder jeder der Reihen giebt die Glieder der folgenden Reihe, was eine Folge der Identitäten a) b) c) und d) ist.

Man bezeichnet naturgemäß jede dieser Reihen als die erste Differenzenreihe der letzten (d. h. unmittelbar darüber stehenden) Reihe, als die zweite Differenzenreihe der vorletzten, als die dritte Differenzenreihe der drittletzten u. s. w.

Hat die erste Differenzenreihe einer gegebenen Reihe lauter gleiche Glieder, so nennt man die letztere eine arithmetische Reihe 1ter Ordnung. Hat die zweite Differenzenreihe einer gegebenen Reihe lauter gleiche Glieder, so heißt die letztere eine arithmetische Reihe 2ter Ordnung. Ebenso giebt es arithmetische Reihen 3ter, 4ter, 5ter ... Ordnung, bei denen also die 3., 4., 5., ... Differenzenreihe lauter gleiche Glieder hat. Zu diesen Reihen verschiedener Ordnung gehören die soeben gefundenen.

28) Man bezeichnet diese Reihen auch als die Reihen der figurierten Zahlen. Sie lassen sich nämlich in eigentümlicher Weise in der Form eines symmetrischen Zahlendreiecks gruppieren, wobei jede der gefundenen Reihen zweimal vorkommt, einmal in der einen, dann in der anderen Schrägrichtung:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot
\end{array}$$

Jede Horizontalreihe lautet rückwärts ebenso wie vorwärts gelesen. Man kann das Zahlendreieck, mit der obersten Horizontalreihe be-

Digitized by Google

ginnend, schnell hinschreiben, indem man unter je zwei Nachbarzahlen jeder Horizontalreihe die Summe beider Zahlen schreibt. Daher ist eben jede Schrägreihe die erste Differenzenreihe der einen benachbarten Schrägreihe.

29) **Aufgabe.** Wie lautet die n^{te} Horizontalreihe des Zahlendreiecks?

Auflösung. Die ersten beiden Zahlen sind 1 und n. Das n^{te} Glied der dritten Schrägreihe würde nach 27) $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ sein. Da aber diese Schrägreihe ein Glied weniger hat, als die voranstehende, so handelt es sich um das $(n-1)^{te}$ Glied, d. h. um $\frac{(n-1)n}{1 \cdot 2}$. Das n^{te} Glied der vierten Schrägreihe würde nach 27) $\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ sein. Da es sich hier aber um das $(n-2)^{te}$ Glied handelt, so erhält man $\frac{(n-2)(n-1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, u. s. w. Die n^{te} Horizontalreihe lautet also

$$1, \frac{n}{1}, \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \ldots$$

Die Kenntnis dieser mit dem $(n+1)^{ten}$ Gliede abbrechenden Reihe ist für die Entwickelung der Mathematik von ganz außerordentlicher Bedeutung geworden.

III. Der binomische Lehrsatz für ganze positive Exponenten.

30) Bildet man der Reihe nach die ganzzahligen Potenzen des zweigliedrigen Ausdrucks (des Binoms) $a+b$, so erhält man $(a+b)^1 = a+b$, $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b+4ab^3+b^4$ u. s. w. Jeder dieser Ausdrücke ist nach fallenden Potenzen von a und nach steigenden Potenzen von b geordnet, die Zahlenfaktoren aber entsprechen den Horizontalreihen des im vorigen Abschnitt behandelten Zahlendreiecks. Es fragt sich zunächst, ob dies immer der Fall ist.

Multipliziert man beispielsweise die Gleichung

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

beiderseits mit $a+b$, so entsteht links $(a+b)^4$, rechts aber entstehen die zu addierenden Reihen

Digitized by Google

$$\begin{array}{r} 1\cdot a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + 1ab^3 \\ + 1a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + 1\cdot b^4 \end{array}$$

$$\text{also } (a+b)^4 = 1\cdot a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1\cdot b^4.$$

War also die Formel für $(a+b)^3$ nach fallenden und steigenden Potenzen von a bezw. b geordnet, so muß notwendig bei $(a+b)^4$ dasselbe der Fall sein.

Bekümmert man sich ferner bei der Addition nur um die Zahlenfaktoren, so sind folgende Reihen gliederweise zu addieren:

$$\begin{array}{r} 1,\ 3,\ 3,\ 1, \\ 1,\ 3,\ 3,\ 1 \\ \hline 1,\ 4,\ 6,\ 4,\ 1. \end{array}$$

Statt jede Zahl mit der darunter stehenden zu vereinigen, kann man aber auch je zwei Nachbarzahlen der ersten Reihe summieren.

Die Reihen der Zahlenfaktoren (Binomial-Koefficienten) in den aufeinander folgenden Formeln werden also ebenso gebildet, wie die Horizontalreihen des Zahlendreiecks.

Folglich ist auch für jedes ganze positive n

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{n-4}b^4 + \cdots.$$

Setzt man $-b$ statt b ein, so bleiben die Glieder mit geradzahligen Exponenten von b ungeändert, die andern aber nehmen negatives Vorzeichen an. Man erhält also folgende mit abwechselnden Vorzeichen behaftete Reihe:

$$(a-b)^n = a^n - \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \cdots$$

Von Wichtigkeit ist der spezielle Fall

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \cdots.$$

Da n als ganz und positiv angenommen ist, so bricht jede dieser Reihen mit dem $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliede ab, denn von dort ab kommt in jedem folgenden Gliede der Faktor $(n-n) = 0$ vor.

Digitized by Google

[31) Auf einem höheren Standpunkte wird gezeigt, daß die binomische Reihe

$$1+\frac{n}{1}x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4+\cdots,$$

die sich ins Unendliche erstreckt, wenn n nicht zugleich ganz, positiv und reell ist, im allgemeinen nicht summiert werden kann, daß dies aber doch möglich ist, sobald der absolute Betrag von x kleiner als 1 ist. Im letzteren Falle ergiebt sich als Summe der unendlichen Reihe wiederum der Ausdruck $(1+x)^n$. Die Bedingung der Konvergenz (Summierbarkeit) ist also ganz dieselbe, wie bei der geometrischen Reihe $1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}$. Feinere Untersuchungen über die Konvergenz überschreiten den Standpunkt der Schule.]

32) **Bemerkung.** Aus

$$(1+1)^n=1+\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots,$$

was für ganzes positives n richtig ist, folgt, daß die Summe jeder Horizontalreihe des Zahlendreiecks eine Potenz von 2 ist. Also z. B.

$$1+1=2^1,\quad 1+2+1=2^2,\quad 1+3+3+1=2^3,$$
$$1+4+6+4+1=2^4.$$

33) **Aufgaben.** Wie lautet die Formel für $(a+b)^n+(a-b)^n$? Wie lautet die Formel für $(a+b)^n-(a-b)^n$? Wie lautet die Formel für $(2x+3y^2)^5$, für $(2x-3y^2)^5$, für $(2x+3y^2)^5+(2x-3y^2)^5$, für $(2x+3y^2)^5-(2x-3y^2)^5$? Wie heißt das 4te Glied der Formel für $(3x+5y^3)^7$?

34) **Bemerkung.** Es ist

$$\left(1+\tfrac{3}{10\,000}\right)^2=1+0{,}0006+0{,}00000009=1{,}00060009,$$

also, wenn man mit weniger als 8 Stellen Genauigkeit rechnet, $1{,}0003^2=\sim 1{,}0006$*). Umgekehrt ist $\sqrt{1{,}0006}=\sim 1{,}0003$.

Allgemeiner: Ist α klein im Verhältnis zu 1, so kann man in $(1\pm\alpha)^2=1\pm 2\alpha+\alpha^2$ den letzten Posten streichen und erhält $(1\pm\alpha)^2=\sim 1\pm 2\alpha$. Umgekehrt ist $\sqrt{1\pm 2\alpha}=\sim 1\pm\alpha$, also $\sqrt{1\pm\alpha}=\sim 1\pm\frac{\alpha}{2}$.

*) $\sim$ bedeutet hier „angenähert" oder „abgerundet".

Digitized by Google

Ferner ist

$$\left(1 + \tfrac{2}{10\,000}\right)^3 = 1 + 0{,}0006 + 0{,}0000\,0012 + 0{,}0000\,0000\,0027$$
$$= 1{,}000600120027,$$

also bei Rechnungen mit geringerer Genauigkeit $(1{,}0002)^3 = \sim 1{,}0006$, und umgekehrt $\sqrt[3]{1{,}0006} = \sim 1{,}0002$.

Allgemeiner ist es bei kleinem α gestattet, in der Formel

$$(1 \pm \alpha)^3 = 1 \pm 3\alpha + 3\alpha^2 \pm \alpha^3$$

die beiden letzten Glieder zu streichen, so daß man hat

$$(1 \pm \alpha)^3 = \sim 1 \pm 3\alpha,$$

und umgekehrt:

$$\sqrt[3]{1 \pm 3\alpha} = \sim 1 \pm \alpha \quad \text{oder} \quad \sqrt[3]{1 \pm \alpha} = \sim 1 \pm \tfrac{\alpha}{3}.$$

[35) Anwendung finden diese abgekürzten Berechnungen vielfach in der Physik und Mechanik. Ist z. B. der lineare Ausdehnungskoeffizient eines festen Körpers bei der Erwärmung um einen Grad Celsius gleich $\frac{1}{n}$, so daß seine Länge l in $l\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ übergeht, so würde der Kubikinhalt des Würfels mit Kante l aus l^3 übergehen in $l^3\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 = \sim l^3\left(1 + \frac{3}{n}\right)$. Weil $\frac{3}{n}$ das Dreifache von $\frac{1}{n}$ ist, sagt man, der kubische Ausdehnungskoeffizient eines festen Körpers sei das Dreifache vom linearen Ausdehnungskoeffizienten.]

IV. Ableitung gewisser arithmetischer Reihen höherer Ordnung mit Hülfe des binomischen Lehrsatzes.

36) Setzt man in der identischen Gleichung $(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ für x der Reihe nach die ganzzahligen Werte $1, 2, 3, \ldots n$, so entsteht folgendes System von Gleichungen:

$$0^3 = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 1$$
$$1^3 = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 1$$
$$2^3 = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - 1$$
$$\vdots$$
$$(n-1)^3 = n^3 - 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n - 1.$$

Digitized by Google

Durch Addition der senkrechten Kolonnen erhält man eine neue Gleichung, in der sich alle Glieder 3ter Potenz bis auf das einzige n^3 wegheben, so daß stehen bleibt:

$$0 = n^3 - 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) - n.$$

Demnach ist die Summe der Quadratzahlen von 1^2 bis n^2

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + (1 + 2 + 3 + \cdots + n) - \frac{n}{3}$$

$$= \frac{n^3}{3} + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{3},$$

oder endlich

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Aufgaben. Wie groß ist die Summe der Quadratzahlen von 1^2 bis 100^2? Wie groß ist die Summe der Quadratzahlen von 200^2 bis 300^2?

37) Macht man dasselbe mit der identischen Gleichung

$$(x-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1,$$

so ist die durch Addition der senkrechten Kolonnen entstehende Gleichung

$$0 = n^4 - 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$
$$- 4(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n,$$

so daß die Summe der Kubikzahlen von 1^3 bis n^3 wird:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$
$$= \frac{n^4}{4} + \frac{6}{4}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) - \frac{4}{4}(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + \frac{n}{4}$$
$$= \frac{n^4}{4} + \frac{3}{2}\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) - \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right) + \frac{n}{4},$$

oder endlich:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$
$$= (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2.$$

Die Summe der n ersten Kubikzahlen ist also stets eine Quadratzahl und zwar das Quadrat von der Summe der n ersten Zahlen.

Aufgaben. Wie groß ist die Summe der Kubikzahlen von 1^3 bis 100^3, und das Quadrat von welcher Zahl ist

Digitized by Google

diese Summe? Wie groß ist die Summe der Kubikzahlen von 200^3 bis 300^3?

Bilde in derselben Weise, wie oben, die Formeln für

$1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4$ und $1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5$.

38) **Bemerkung.** Aus

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}.$$

folgt durch beiderseitige Division durch n^2

$$\frac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Setzt man $n = \infty$, so fällt $\frac{1}{2n}$ weg, und man erhält die Formel:

$$\text{für } n = \infty \text{ ist } \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

Aus $$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

folgt durch beiderseitige Division durch n^3

$$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

Setzt man $n = \infty$, so fallen rechts die beiden letzten Glieder weg, und man hat die Formel

$$\text{für } n = \infty \text{ ist } \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \frac{1}{3}.$$

Ebenso ergiebt sich für $n = \infty$

$$\frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3}{n^4} = \frac{1}{4}.$$

Allgemeiner gilt für ganzes positives p der Satz:

$$\text{für } n = \infty \text{ ist } \frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1},$$

wofür man auch schreiben kann

$$\text{für } n = \infty \text{ ist } \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{m=1}^{m=n} m^p = \frac{1}{p+1}.$$

[Die Formeln des Abschnitts 38 finden vielfache Anwendung in der Kurvenlehre, Stereometrie und Mechanik, z. B. bei der Flächenberechnung von Parabeln 2ter und höherer Ordnung, bei der Unter-

Digitized by Google

suchung der Kreisevolvente, bei der Inhaltsberechnung von Paraboloiden höherer Ordnung, auch bei gewissen Ableitungen der Simpson-Newtonschen Regel und der Summenformel der Stereometrie, bei der Untersuchung schräg abgeschnittener Prismen und Cylinder, bei der Berechnung von Trägheitsmomenten, elastischen Linien und Träger-Abbiegungen, bei hydrostatischen Untersuchungen u. s. w. Es handelt sich dabei um das Umgehen der Integration ganzer rationaler Funktionen. Auf höherem Standpunkte wird bewiesen, daß die Formel auch für gebrochenes p gilt, nur muß dann $p > -1$ sein.]

39) Die Reihen $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ oder $\sum_{m=1}^{m=n} m^2$, $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ oder $\sum_{m=1}^{m=n} m^3$, überhaupt die Reihen $\sum_{m=1}^{m=n} m^p$ sind arithmetische Reihen 2ter, 3ter, $\cdots$ p^{ter} Ordnung.

Bei der ersten z. B. folgen auf einander die Glieder

$$n^2, \quad (n+1)^2, \quad (n+2)^2, \quad (n+3)^2, \quad \cdots$$

deren Differenzen sind

$$(2n+1), \quad (2n+3), \quad (2n+5), \quad \cdots,$$

was eine arithmetische Reihe 1ter Ordnung ist, so daß die ursprüngliche 2ter Ordnung war.

Bei der folgenden Reihe handelt es sich um

$$n^3, \quad (n+1)^3, \quad (n+2)^3, \quad (n+3)^3, \quad (n+4)^3, \quad \cdots$$

also um die Differenzen

$$(3n^2 + 3n + 1), \quad (3n^2 + 9n + 7), \quad (3n^2 + 15n + 19),$$
$$(3n^2 + 21n + 37), \quad \cdots.$$

Dazu sind die Differenzen

$$(6n + 6), \quad (6n + 12), \quad (6n + 18), \quad \cdots.$$

Letzteres ist eine arithmetische Reihe 1ter Ordnung, die ursprüngliche also von der dritten Ordnung. So kann man fortfahren.

40) Dasselbe ergiebt sich in zwingender Weise bei folgender Ableitung der Reihen $\sum m^p$, die unabhängig vom binomischen Lehrsatze ist.

Aus der in Abschnitt 24 behandelten Identität $\frac{x(x+1)}{1 \cdot 2} - \frac{(x-1)x}{1 \cdot 2}$

Digitized by Google

$= \frac{x}{1}$ folgt $\frac{x(x+1)}{1 \cdot 2} - x = \frac{(x-1)x}{1 \cdot 2}$ oder $\frac{2x(x+1)}{1 \cdot 2} - 2x$ $= x^2 - x$, so daß auch folgende Identität gilt:

$$x^2 = 2\frac{x(x+1)}{1 \cdot 2} - x.$$

Setzt man für x der Reihe nach die Zahlen 1, 2, 3, ····, n, und addiert man die Kolonnen der unter einander geschriebenen Zahlengleichungen, so erhält man

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$
$$= 2\left[\frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}\right] - [1 + 2 + 3 \cdots + n]$$
$$= 2 \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Rechts steht ursprünglich die Differenz zweier arithmetischer Reihen, von denen die eine 2ter, die andere 1ter Ordnung ist.

Eine sehr einfache Betrachtung zeigt nun, daß die Summe oder Differenz zweier arithmetischer Reihen höherer Ordnung stets wieder eine solche Reihe ist, deren Ordnung im allgemeinen mit der Reihe von der höheren Ordnung übereinstimmt. Folglich steht hier rechts, wie auch links eine arithmetische Reihe 2ter Ordnung.

In ähnlicher Weise folgt aus der gleichfalls unter 24) behandelten Identität

$$\frac{x(x+1)(x+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{(x-1)x(x+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{x(x+1)}{1 \cdot 2}$$
$$\frac{x(x+1)(x+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{x(x+1)}{1 \cdot 2} = \frac{(x-1)x(x+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{x^3 - x}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

und daraus ergiebt sich die Identität

$$x^3 = 6\frac{x(x+1)(x+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 6\frac{x(x+1)}{1 \cdot 2} + x.$$

Setzt man wiederum für x die Werte 1, 2, 3, ···· n und addiert man, so entsteht

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$
$$= 6\left[\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right]$$
$$- 6\left[\frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}\right] + [1 + 2 + 3 + \cdots + n]$$
$$= 6\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - 6\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$$
$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Digitized by Google

Auf der rechten Seite handelt es sich um Vereinigung dreier arithmetischer Reihen, von denen die höchste von der dritten Ordnung ist. Also ist auch die Reihe der Kubikzahlen eine arithmetische Reihe der dritten Ordnung.

In gleicher Weise kann man zeigen, daß $1^p + 2^p + \cdots + n^p$ für ganzes positives p eine arithmetische Reihe p^{ter} Ordnung ist.

V. Die Exponentialreihe und die natürlichen Logarithmen.*)

41) Nach dem binomischen Satze ist für ganzes positives n

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^v = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{1}{n^4} + \cdots.$$

So ist z. B.

$$\left(1+\tfrac{1}{1}\right)^1 = 1 + \tfrac{1}{1}\cdot\tfrac{1}{1} = 2,$$

$$\left(1+\tfrac{1}{2}\right)^2 = 1 + \tfrac{2}{1}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{2\cdot 1}{1\cdot 2}\cdot\tfrac{1}{2^2} = \tfrac{9}{4} = 2\tfrac{1}{4},$$

$$\left(1+\tfrac{1}{3}\right)^3 = 1 + \tfrac{3}{1}\cdot\tfrac{1}{3} + \tfrac{3\cdot 2}{1\cdot 2}\cdot\tfrac{1}{3^2} + \tfrac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\tfrac{1}{3^3} = \tfrac{64}{27} = 2\tfrac{10}{27}.$$

Je größer man n nimmt, um so größer wird der Wert von $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, daß er aber nicht über einen gewissen Wert hinaus wächst, ergiebt sich, wenn man n unendlich groß werden läßt. Die ursprüngliche Reihe läßt sich nämlich folgendermaßen schreiben:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1-\frac{1}{n}}{1\cdot 2} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots.$$

Ist nun n unendlich groß, so darf man in den einzelnen Gliedern die

*) Dieser Abschnitt kann auf dem Gymnasium überschlagen werden, obwohl pädagogische Schwierigkeiten seine Durchnahme nicht hindern. Er giebt der elementaren Lehre von dem Logarithmen eine vorläufige Abrundung. Der binomische Lehrsatz wird dabei als nur für ganze positive Exponenten bewiesen vorausgesetzt.

Digitized by Google

Ausdrücke $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}$ u. s. w. gleich Null setzen, vorausgesetzt, daß es sich nicht um unendlich viele Faktoren dieser Art handelt. (Denn unendlich viele unendlich kleine Größen können unter Umständen sehr großen Einfluß haben.) Demnach erhält man

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots,$$

oder, wenn man das Produkt $1\cdot 2\cdot 3\cdots m$ mit dem Zeichen $m!$ bezeichnet:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots.$$

Da die beiden ersten Glieder die Summe 2 geben, so ist die Summe der Reihe größer als 2. Jedes Glied dieser Reihe ist vom 4ten ab kleiner, als das entsprechende Glied der Reihe

$$1 + \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right] = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3,$$

folglich kann die Summe der untersuchten Reihe nicht größer sein, als 3, sie muß zwischen 2 und 3 liegen. Verwandelt man die einzelnen Brüche in Dezimalbrüche, so ergiebt sich durch Addition einer hinreichend großen Zahl von Gliedern als Summe der Reihe die Zahl $2{,}7182818\cdots$, die man als e bezeichnet. Es ist also

$$\text{für } n=\infty \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}7182818\cdots.$$

(Auf der linken Seite würde es nicht erlaubt gewesen sein, $\frac{1}{n}=0$ zu setzen, weil die Anzahl der Faktoren $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ unendlich groß ist. Es handelt sich also durchaus nicht um $1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdots = 1$, sondern um etwas ganz anderes.)

42) **Aufgabe.** Den Ausdruck $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ für unendlich großes, ganz und positiv zu denkendes n zu berechnen.

Auflösung. Man erhält zunächst auf demselben Wege wie vorher

$$\text{für } n=\infty \quad \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots.$$

Auch diese Reihe muß für jedes endliche x eine endliche Summe haben. Ist z. B. $x=4$, so ist das 5te Glied $\frac{4^4}{4!}$, und sondert man dieses von sämtlichen rechts vom 4ten stehenden Gliedern ab, so hat man als Rest der Reihe

$$\frac{4^4}{4!}\left[1 + \frac{4}{5} + \frac{4\cdot 4}{5\cdot 6} + \frac{4\cdot 4\cdot 4}{5\cdot 6\cdot 7} + \cdots\right].$$

Digitized by Google

Dabei ist jedes Glied der Klammer (vom ersten abgesehen) kleiner als die Glieder der geometrischen Reihe

$$1 + \frac{4}{5} + \frac{4 \cdot 4}{5 \cdot 5} + \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{5 \cdot 5 \cdot 5} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{4}{5}} = 5,$$

also ist jener Rest der Reihe kleiner als $\frac{4^4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$. Es handelt sich also um eine konvergente Reihe.

Nun ist für ganzes, positives unendlich großes m

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e,$$

setzt man also für m die positive, unendlich große Zahl $\frac{n}{x}$, die man sich als ganz denken kann [weil man zur unendlich großen Zahl n eine beliebig große endliche Zahl hinzuaddieren kann, ohne daß sich etwas ändert], so hat man

$$\text{für } n = \infty \quad \left[1 + \frac{1}{\left(\frac{n}{x}\right)}\right]^{\frac{n}{x}} = e, \quad \text{oder} \quad \left[1 + \frac{x}{n}\right]^{\frac{n}{x}} = e.$$

Erhebt man also rechts und links zur x^{ten} Potenz, so folgt

$$\text{für } n = \infty \quad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots,$$

eine Formel, die für jedes beliebige x gilt. Da aber $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ ist, so reicht die Berechnung für positives x vorläufig aus.

43) **Aufgabe.** Die 10te Wurzel aus e zu berechnen.

Auflösung. Es ist

$$e^{\frac{1}{10}} = 1 + \frac{\frac{1}{10}}{1} + \frac{\frac{1}{100}}{1 \cdot 2} + \frac{\frac{1}{1000}}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\frac{1}{10\,000}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots.$$

Durch Addition der in Dezimalbrüche verwandelten Zahlen

$$\begin{array}{r} 1{,}000\,0000\,000 \\ 0{,}100\,0000\,000 \\ 0{,}005\,0000\,000 \\ 0{,}000\,1666\,666 \cdots \\ 0{,}000\,0041\,666 \cdots \\ 0{,}000\,0000\,833 \cdots \\ \hline \end{array}$$

erhält man $\sqrt[10]{e} = 1{,}105\,1709 \cdots$

mit einer Genauigkeit auf 8 Stellen.

Digitized by Google

Je größer der Wurzelexponent ist, um so leichter läßt sich $\sqrt[n]{e}$ auf zahlreiche Stellen berechnen. Man berechne z. B. $\sqrt[100]{e}$ auf 20 Stellen.

44) Während man aus anderen Zahlen (von 1 abgesehen) nur die 2ten, 4ten, 8ten, 3ten, 6ten .... Wurzeln ausziehen kann, aber auf das Ausziehen der 5ten, 7ten, ... Wurzeln verzichten muß, hat man in e eine Zahl gefunden, aus der sich jede beliebige Wurzel mit Hülfe der obigen Reihe bilden läßt, oder die man in beliebiger Weise potenzieren kann. Deshalb eignet sie sich außerordentlich gut zur Basis eines Logarithmensystems, welches man als das natürliche bezeichnet hat.

Ist $e^{\alpha} = a$, so nennt man α den natürlichen Logarithmus von a, geschrieben: $\alpha = {}^{e}\lg a$. (So war z. B. vorher berechnet $e^{\frac{1}{10}} = 1{,}105\,1709\,\cdots$, folglich ist $0{,}1 = {}^{e}\lg 1{,}105\,1709$.)

Diese Logarithmen haben dieselben Grundeigenschaften, wie die früher behandelten (vergl. Teil I, Nr. 109.).

Ist $\alpha = {}^{e}\lg a$, so folgt $e^{\alpha} = a$,

ist $\beta = {}^{e}\lg b$, so folgt $e^{\beta} = b$.

Sind beide Bedingungen erfüllt, so folgt durch beiderseitige Multiplikation der abgeleiteten Gleichungen $e^{\alpha} \cdot e^{\beta} = ab$, oder $e^{\alpha+\beta} = ab$, so daß $\alpha + \beta = {}^{e}\lg(ab)$ oder ${}^{e}\lg a + {}^{e}\lg b = {}^{e}\lg(ab)$ ist.

Es gelten also, wie früher, die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
{}^{e}\lg(ab) &= {}^{e}\lg a + {}^{e}\lg b,\\
{}^{e}\lg\left(\frac{a}{b}\right) &= {}^{e}\lg a - {}^{e}\lg b,\\
{}^{e}\lg(a^{n}) &= n({}^{e}\lg a),\\
{}^{e}\lg\sqrt[n]{a} &= \frac{1}{n}({}^{e}\lg a).
\end{aligned}
$$

45) Der Zusammenhang der natürlichen Logarithmen mit den gemeinen (Briggischen) Logarithmen ergiebt sich folgendermaßen. Es sei

$$\alpha = {}^{e}\lg a, \quad \text{also} \quad e^{\alpha} = a.$$

Logarithmiert man beide Seiten der letzten Gleichung unter Annahme der logarithmischen Basis 10, so hat man

${}^{10}\lg(e^{\alpha}) = {}^{10}\lg a$, oder $\alpha({}^{10}\lg e) = {}^{10}\lg a$, oder ${}^{e}\lg a \cdot ({}^{10}\lg e) = {}^{10}\lg a$.

Folglich ist

$${}^{e}\lg a = \frac{{}^{10}\lg a}{{}^{10}\lg e},$$

Digitized by Google

oder wenn man ${}^{10}\lg e$ mit m bezeichnet (Modul der Briggischen oder gemeinen Logarithmen),

$$ {}^{e}\lg a = \frac{{}^{10}\lg a}{m}, \quad \text{und} \quad {}^{10}\lg a = m \cdot ({}^{e}\lg a). $$

Aus $m = {}^{10}\lg e$ folgt $10^m = e$, also $e^{\frac{1}{m}} = 10$, d. h. $\frac{1}{m} = {}^{e}\lg 10$. Es ist also zugleich

$$ m = {}^{10}\lg e = \frac{1}{{}^{e}\lg 10}. $$

Demnach kann m sowohl mit Hülfe der Briggischen, als auch mit Hülfe der natürlichen Logarithmen berechnet werden.

Die Berechnung ergiebt $m = 0{,}434\,2945$. (Vergl. z. B. die Berechnungsmethode Teil I. 108.)

Zur Ableitung der natürlichen Logarithmen aus der Tabelle der künstlichen benutzt man die Formel

$$ {}^{e}\lg a = \frac{{}^{10}\lg a}{{}^{10}\lg e} = \frac{{}^{10}\lg a}{m}; $$

zur Ableitung der Briggischen Logarithmen aus der Tabelle der natürlichen benutzt man die Formel

$$ {}^{10}\lg a = \frac{{}^{e}\lg a}{{}^{e}\lg 10} = m\,({}^{e}\lg a). $$

Die Wissenschaft hat den letzteren Weg eingeschlagen, da e die am leichtesten zu potenzierende Basis ist, sobald es sich um gebrochene Exponenten handelt. Allerdings hat man aus der Exponentialreihe andere Reihen abgeleitet, mit deren Hülfe die logarithmischen Tabellen bequemer angefertigt werden konnten.

46) Zu den geometrisch interessanten Anwendungen der Formel $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ gehört die Flächenberechnung der gleichseitigen und anderer Hyperbeln. Auch in der Mechanik findet vielfache Anwendung der Gleichung statt. Von Interesse ist noch folgende Aufgabe der Zinseszinsrechnung.

Aufgabe. In welcher Weise vermehrt sich ein Kapital, wenn die Zinsen in jedem Momente zum Kapital geschlagen werden?

Auflösung. Bei jährlich einmaligem Zinszuschlag verwandelt sich das Kapital 1 in einem Jahre in $\left(1 + \frac{\%}{100}\right)$, in n Jahren in $\left(1 + \frac{\%}{100}\right)^n$.

Digitized by Google

Bei m-maligem Zinszuschlage während jedes Jahres geht es über in $\left(1 + \frac{\%}{100\,m}\right)^m$ beziehungsweise $\left(1 + \frac{\%}{100\,m}\right)^{mn}$.

Ist nun m unendlich groß, so handelt es sich um

$$\left(1 + \frac{0{,}01\,\%}{m}\right)^m = e^{0{,}01\%} \quad \text{bezw.} \quad \left(1 + \frac{0{,}01\,\%}{m}\right)^{mn} = e^{n \cdot 0{,}01\%}.$$

Das Kapital c geht also nach n Jahren bei einem in jedem Momente erfolgendem Zinszuschlage über in

$$k = c \cdot e^{n \cdot 0{,}01\%}.$$

Handelt es sich z. B. um 5%, so ist der Vermehrungsfaktor statt $\left(1 + \frac{5}{100}\right)$ jetzt $e^{\frac{5}{100}} = e^{\frac{1}{20}}$. Man berechne $\frac{1}{20} \lg e = \frac{1}{20}\,0{,}434\,2945 = 0{,}021\,7147$. Der Numerus davon ist 1,051271. Hier wird also das Kapital nach n Jahren sein $k = c \cdot 1{,}051271^n$. Hierbei braucht n keine ganze Zahl zu sein, sondern jede beliebige positive reelle Zahl kann eingesetzt werden. Während also bei einfachem Zinszuschlag die Berechnung der Anzahl der Jahre auf ungenaue Resultate führte, sobald nicht eine ganze Zahl herauskam, sodaß über den Überschuß besondere Vereinbarung getroffen werden mußte, ist das Resultat hier in jedem Falle absolut genau. — Der ununterbrochene Zinszuschlag könnte etwa mit dem Wachstum eines regelmäßig zunehmenden Waldes verglichen werden.

VI. Der Moivresche Lehrsatz und einige aus ihm abgeleitete Reihen.

47) Im ersten Teile, Abschnitt 101, war $i = +\sqrt{-1}$ gesetzt, also $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = +1$, $i^5 = i$ u. s. w. Man merke auch $\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$.

In Folgendem werden mehrfach complexe Größen $a + bi$ und $a_1 + b_1 i$ gleichzusetzen sein. Sind sie gleich, so muß $a = a_1$ und $b = b_1$ sein, denn aus $a + bi = a_1 + b_1 i$ folgt $(a - a_1) = i(b_1 - b)$. Wenn also nicht $a = a_1$ und zugleich $b = b_1$ wäre, so würde die reelle Zahl links gleich der imaginären Zahl rechts sein, was unmöglich ist. Stimmen also komplexe Zahlen überein, so stimmen sowohl ihre reellen Teile, als auch ihre imaginären Teile für sich überein.

Digitized by Google

48) Auf Grund bekannter goniometrischer Formeln ist

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$
$$= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta).$$

Ebenso ist

$$[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)](\cos\gamma + i\sin\gamma)$$
$$= \cos(\alpha+\beta+\gamma) + i\sin(\alpha+\beta+\gamma).$$

Daher gilt für beliebig viele Faktoren dieser Art der Satz

a) $(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)(\cos\gamma + i\sin\gamma)\cdots$
$= \cos(\alpha+\beta+\gamma+\cdots) + i\sin(\alpha+\beta+\gamma+\cdots)$.

Setzt man hier $\alpha = \beta = \gamma \cdots$, so folgt zunächst für ganzes positives n die Formel

b) $$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha.$$

Daraus folgt

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = \sqrt[n]{\cos n\alpha + i\sin n\alpha},$$

also, wenn $n\alpha = \beta$ und daher $\alpha = \frac{\beta}{n}$ gesetzt wird,

$$\cos\frac{\beta}{n} + i\sin\frac{\beta}{n} = \sqrt[n]{\cos\beta + i\sin\beta}.$$

Schreibt man wieder α statt β, so hat man die Gleichung

c) $$\sqrt[n]{\cos\alpha + i\sin\alpha} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{\alpha}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n}.$$

Damit ist aber nur einer der Wurzelwerte gefunden. Später wird gezeigt, daß es im Ganzen n Wurzeln giebt.

d) $$(\cos m\alpha + i\sin m\alpha)^{\frac{1}{n}} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^{\frac{m}{n}} = \left(\cos\frac{m\alpha}{n} + i\sin\frac{m\alpha}{n}\right).$$

Die Formel b) gilt also auch für gebrochenes n.

Nach a) ist

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)) = \cos(\alpha-\alpha) + i\sin(\alpha-\alpha)$$
$$= \cos 0 + i\sin 0 = 1 + 0 = 1.$$

Da $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ ist, so folgt

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\alpha - i\sin\alpha) = 1,$$

oder

Digitized by Google

e) $$\frac{1}{\cos\alpha + i\sin\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha,$$

oder auch

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{-1} = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha).$$

Daraus folgt

f) $$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{-n} = (\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha))^n$$
$$= \cos(-n\alpha) + i\sin(-n\alpha).$$

Demnach gilt der sogenannte Moivresche Satz

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$$

auch für negative und gebrochene Exponenten.

Sowohl die Formel a) als auch die Formel b) erinnern an die Eigenschaften der Potenzen. Bei a) wurde links multipliziert, dagegen hatte man rechts Addition, ganz ebenso, wie in der Formel $e^\alpha e^\beta e^\gamma = e^{\alpha+\beta+\gamma}$. Bei b) wird links potenziert, rechts multipliziert, ähnlich wie in der Formel $(e^\alpha)^n = e^{n\alpha}$. Bei c) wird links radiciert, rechts dividiert, ganz wie bei $\sqrt[n]{e^\alpha} = e^{\frac{\alpha}{n}}$.

49) Für ganzes positives n war der binomische Lehrsatz bewiesen, für solches ist also

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$$
$$= \cos^n\alpha + \frac{n}{1}\cos^{n-1}\alpha i\sin\alpha + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2}\alpha i^2\sin^2\alpha + \cdots,$$

oder

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos^n\alpha + i\frac{n}{1}\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha$$
$$- i\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + \cdots$$

Zugleich ist

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha.$$

Die rechten Seiten müssen übereinstimmen, also sind sowohl die reellen, als auch die imaginären Teile einander gleich.

Daraus ergiebt sich für ganzes positives n

g) $$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2}\sin^2\alpha$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha - \cdots,$$

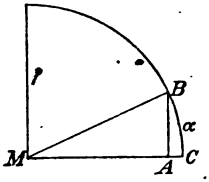
Digitized by Google

h) $$\sin n\alpha = \frac{n}{1}\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot}\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha - \cdots\cdot$$

Aufgabe. Bilde hieraus Formeln für $\cos 3\alpha$, $\cos 4\alpha$, $\cos 5\alpha \cdots$, für $\sin 3\alpha$, $\sin 4\alpha$, $\sin 5\alpha$, $\cdots$

50).*) In Fig. 101 ist $AB = \sin\alpha$. Je kleiner der Bogen α ist, um so mehr wird $\overline{AB} = \overset{\frown}{CB}$, d. h. bei unendlich kleinem α kann man α und $\sin\alpha$ mit einander vertauschen, ebenso α^2 und $\sin^2\alpha$, α^3 und $\sin^3\alpha$. Nur bei unendlich großem Exponenten würde Vorsicht nötig sein.

Fig. 101.



Ferner ist

$$\cos\alpha = \sqrt[2]{1-\sin^2\alpha} = (1-\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}},$$

folglich

$$\cos^n\alpha = (1-\sin^2\alpha)^{\frac{n}{2}}.$$

Ist nun n unendlich groß, so kann man es als gerade Zahl annehmen, so daß auch $\frac{n}{2}$ als ganz und unendlich groß betrachtet werden kann. Dann gilt für uns die binomische Formel, d. h.

$$\cos^n\alpha = (1-\sin^2\alpha)^{\frac{n}{2}}$$

$$= 1 - \frac{n}{2}\sin^2\alpha + \frac{\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}-1\right)}{1\cdot 2}\sin^4\alpha - \frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin^6\alpha + \cdots\cdot$$

und ebenso

$$\cos^n\frac{\beta}{n} = 1 - \frac{n}{2}\sin^2\frac{\beta}{n} + \frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}{1\cdot 2}\sin^4\frac{\beta}{n} - \frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin^6\frac{\beta}{n} + \cdots,$$

also, da $n = \infty$ ist, also der Bogen für den Sinus gesetzt werden darf,

$$\cos^n\frac{\beta}{n} = 1 - \frac{n}{2}\frac{\beta^2}{n^2} + \frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}{1\cdot 2}\frac{\beta^4}{n^4} - \frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{\beta^6}{n^6} + \cdots\cdot$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\frac{\beta^2}{n} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)}{1\cdot 2}\frac{\beta^4}{n^2} - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{n}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{\beta^6}{n^6} + \cdots\cdot$$

*) Abschnitt 50 bis 52 können auf dem Gymnasium überschlagen werden. Die Ausführlichkeit der Darstellung ist eine absichtliche.

Digitized by Google

Diese Reihe konvergiert für großes n und kleines $\frac{\beta}{n}$ sehr schnell. Wird aber $n = \infty$ gesetzt, so fallen rechts alle Glieder mit Ausnahme des ersten weg, und man hat die durchaus nicht selbstverständliche Formel:

$$\text{Für } n = \infty \text{ ist } \cos^n \frac{\beta}{n} = 1.$$

51) Nach diesen Vorbereitungen setze man in Formel g) β für $n\alpha$, also $\frac{\beta}{n}$ für α, so daß sie in folgende übergeht:

$$\cos\beta = \cos^n\frac{\beta}{n} - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2}\frac{\beta}{n}\sin^2\frac{\beta}{n} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos^{n-4}\frac{\beta}{n}\sin^4\frac{\beta}{n} - \cdots.$$

Für $n = \infty$ vereinfacht sich diese Formel ganz außerordentlich, da dann $\cos^n\frac{\beta}{n} = 1$ ist, ebenso $\cos^{n-2}\frac{\beta}{n} = \frac{\cos^n\frac{\beta}{n}}{\cos^2\frac{\beta}{n}} = \frac{1}{1} = 1$, ebenso $\cos^{n-3}\frac{\beta}{n} = 1$, und da ferner für jeden Sinus der Bogen gesetzt werden darf. Man erhält

$$\cos\beta = 1 - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{\beta^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\frac{\beta^4}{n^4} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\frac{\beta^6}{n^6} + \cdots$$

$$= 1 - \frac{1-\frac{1}{n}}{1\cdot 2}\beta^2 + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\beta^4 - \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\left(1-\frac{4}{n}\right)\left(1-\frac{5}{n}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\beta^6 + \cdots,$$

oder endlich, da man die Größen $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}$ u. s. w. streichen kann, und wenn man wieder α statt β schreibt:

i) $$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \frac{\alpha^8}{8!} - \cdots.$$

Ganz ebenso leitet man aus der Formel h) ab die Formel

k) $$\sin\alpha = \frac{\alpha}{1!} - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \frac{\alpha^9}{9!} - \cdots.$$

Diese Reihen konvergieren um so schneller, je kleiner α ist, können also dann zur Berechnung der Funktionen benutzt werden. (Man

Digitized by Google

achte auch darauf, daß die Cosinusreihe nur gerade Exponenten, die Sinusreihe aber nur ungerade zeigt. Dies stimmt damit zusammen, daß $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ und $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ ist.)

Aufgabe. Berechne den Sinus und Cosinus eines Bogens von der Länge $\frac{1}{10}$ am Kreise mit Radius 1 unter Benutzung der 5 ersten Glieder der Reihen.

52) Aus i) und k) folgt

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = 1 + \frac{i\alpha}{1!} - \frac{\alpha^2}{2!} - \frac{i\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^4}{4!} + \frac{i\alpha^5}{5!} - \cdots$$

$$= 1 + \frac{i\alpha}{1!} + \frac{(i\alpha)^2}{2!} + \frac{(i\alpha)^3}{3!} + \frac{(i\alpha)^4}{4!} + \frac{(i\alpha)^5}{5!} + \cdots.$$

Zugleich ist nach der Formel für $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ bei ganzem positivem, unendlich großem n

$$\left(1 + \frac{i\alpha}{n}\right)^n = 1 + \frac{i\alpha}{1!} + \frac{(i\alpha)^2}{2!} + \frac{(i\alpha)^3}{3!} + \cdots.$$

Da die rechten Seiten übereinstimmen, stimmen auch die linken überein, und man hat

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = \left(1 + \frac{i\alpha}{n}\right)^n = e^{i\alpha}.$$

Die gelegentlich des Moivreschen Satzes besprochenen Potenz-Eigenschaften des Ausdrucks $\cos\alpha + i\sin\alpha$ erscheinen jetzt als ganz selbstverständlich, denn er ist eine einfache Potenz von e. Da

$$\frac{1}{\cos\alpha + i\sin\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha$$

ist, so folgt auch

$$\cos\alpha - i\sin\alpha = e^{-i\alpha}.$$

Es gilt also folgendes System von Gleichungen:

l)
$$\begin{cases} \cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}, \\ \cos\alpha - i\sin\alpha = e^{-i\alpha}, \\ \cos\alpha = \dfrac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}, \\ \sin\alpha = \dfrac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}. \end{cases}$$

Die beiden letzten folgen aus den beiden ersten durch Addition bezw. Subtraktion. Durch Division folgt aus den beiden ersten noch

$$e^{2i\alpha} = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha},$$

Digitized by Google

also, wenn auf der rechten Seite oben und unten durch cos α dividiert wird,

m) $$e^{2i\alpha} = \frac{1 + i \tan\alpha}{1 - i \tan\alpha}.$$

Da $\tan\frac{\pi}{4} = \tan 45^0 = 1$ ist, so folgt hieraus $e^{2i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{1-i}$, also $2i\frac{\pi}{4} = {}^e\lg\frac{1+i}{1-i}$ und

n) $$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2i}\,{}^e\lg\frac{1+i}{1-i}.$$

Man kann von hier aus noch zur Entwickelung der Logarithmen in Reihen übergehen, da jedoch dazu die Kenntnis des binomischen Satzes für gebrochene Exponenten nötig ist, soll dies für eine höhere Stufe verspart werden.

VII. Die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen und der n^{ten} Wurzeln aus der Einheit und aus anderen Zahlen.*)

53) In Teil I (Abschnitt 75) war gezeigt, wie man die Reihe der positiven und negativen ganzen Zahlen auf einer Geraden darstellen kann. Später wurde gezeigt, wie auch die Werte der gebrochenen Zahlen zur Anschauung gebracht werden können, endlich wurde darauf hingewiesen, daß durch die Einführung der irrationalen Zahlen die Gerade stetig mit Zahlenwerten bedeckt werden kann. In Abschnitt 101 wurde darauf hingedeutet, daß für die imaginären und komplexen Zahlen auf der Geraden kein Raum mehr übrig ist, daß man also zu ihrer Darstellung die zweite Dimension zu Hülfe nehmen muß. Man hat also versucht, die komplexen Zahlen in der Ebene zur Darstellung zu bringen.

*) Es empfiehlt sich nicht, den Abschnitt VII auf den Gymnasien zu überschlagen. Die Lehre von den n Werten der n^{ten} Wurzeln und den n Lösungen der Gleichung n^{ten} Grades bleibt ohne die hier gegebenen Veranschaulichungen ein abstraktes und schwer zu verstehendes Gebiet. In dem Umstande, daß die n^{ten} Wurzeln aus jeder Zahl mit den Ecken eines regelmäßigen n-Ecks zusammenfallen, liegt eine nicht nur Interesse erweckende, sondern auch bequem zu verwendende Handhabe. Die vier ersten Kapitel in des Verfassers „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften" (Leipzig, B. G. Teubner) geben weiteres Übungsmaterial nebst physikalischen und kartographischen Anwendungen.

Digitized by Google

Die Argand-Gaußsche Darstellung beruht auf Folgendem:

Jede komplexe Zahl $x + yi$ läßt sich in der sogenannten reducierten Form $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ darstellen. Setzt man nämlich beide Ausdrücke gleich, so müssen die reellen und die imaginären Teile beider übereinstimmen, so daß

$$x = r\cos\varphi \quad \text{und} \quad y = r\sin\varphi$$

ist. Durch Quadrieren und Addieren erhält man

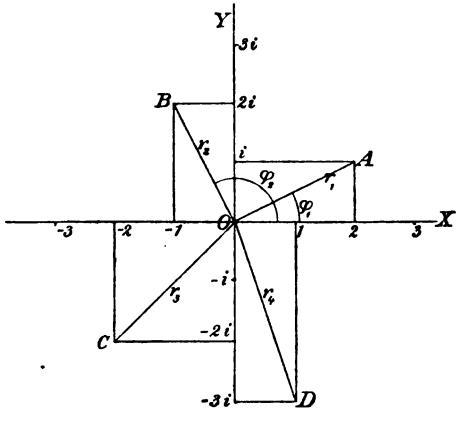
$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r^2,$$

durch Division entsteht $\frac{y}{x} = \tan\varphi$, also $\varphi = \arctan\frac{y}{x}$ (lies arcus tangens $\frac{y}{x}$, was den Bogen bedeuten soll, dessen Tangente gleich $\frac{y}{x}$ ist).

Man bezeichnet r als den absoluten Betrag der komplexen Zahl, φ als die Abweichung, die Größe $(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ kann man, wie sich sofort zeigen wird, zweckmäßig als ihren Richtungskoeffizienten bezeichnen.

Das Gesagte stimmt derartig mit den Anfangsgründen der Koordinatenlehre überein, daß es nahe liegt, die reellen Zahlen x auf der Horizontalachse (reellen Achse) des Koordinatensystems, die rein imaginären Zahlen yi auf der senkrechten (imaginären Achse) darzustellen, jede komplexe Zahl $x + yi$ aber durch den Punkt, dessen Koordinaten x und y sind. So ist in Figur 102 die senkrechte Achse in ebensolche Teile eingeteilt, wie die Horizontale, denn es ist $i = 1(\cos 90^0 + i\sin 90^0)$, so daß der absolute Betrag von i als 1 anzusehen ist. Die Zahl $2 + i$ wird durch A, die Zahl $-1 + 2i$ durch B, die Zahl $-2 - 2i$ durch C, die Zahl $1 - 3i$ durch D dargestellt. Zugleich ist für A, den obigen Formeln entsprechend, $r_1 = \sqrt{2^2 + 1^2}$, $\tan\varphi_1 = \frac{1}{2}$, $r_1\cos\varphi_1 = 2$, $r_1\sin\varphi_1 = 1$. Faßt man nun OA als Strecke auf, das heißt als Gerade von der Länge r_1 und der Richtung φ_1, so kann man auch sagen, die Zahl $2 + i$

Fig. 102.

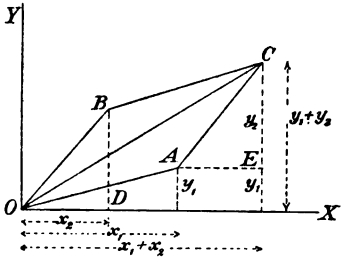


Digitized by Google

werde durch die Strecke OA dargestellt. Ähnliche Betrachtungen lassen sich für die Punkte B, C und D anstellen. Der Winkel φ wird, wie in der Koordinatenlehre (analytischen Geometrie), stets von der positiven reellen Achse OX aus gemessen. Jeder möglichen komplexen Zahl entspricht jetzt ein Punkt der Ebene.

54) Die Addition komplexer Zahlen $(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i)$ giebt das Resultat $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$. Ist also in Fig. 103 $x = x_1 + x_2$ und $y = y_1 + y_2$, so stellt der Punkt C mit den Koordinaten x und y die Summe der durch A und B vertretenen Zahlen dar. Dabei ist aber $AE = OD = x_2$ und $EC = DB = y_2$, also $AC \parallel OB$, d. h. $OACB$ ist ein Parallelogramm. Da nun die Summe $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$ auch durch die Strecke OC dargestellt wird, so erkennt man, daß die Summe zweier komplexer Zahlen durch die Diagonale ihres Parallelogramms veranschaulicht wird. Mit anderen Worten: Die Addition der Strecken geschieht ebenso, wie die Addition der Kräfte in der Mechanik (Parallelogramm der Kräfte), oder: Man findet die Summe zweier Strecken, indem man sie hintereinander zeichnet. So ist z. B. $OA + OB = OA + AC = OB + BC = OC$. (Ist nur die Länge der Strecke OA gemeint, so deutet man dies zweckmäßig durch $\overline{OA}$ an.)

Fig. 103.



55) Ebenso ist $OC - OA = OC - BC = OC + CB = OB$ und $OC - OB = OC - AC = OC + CA = OA$. Demnach geschieht auch die Subtraktion der Strecken ebenso, wie in der Mechanik die Subtraktion der Kräfte. Dabei ist

$$x + yi - (x_1 + y_1 i) = (x - x_1) + (y - y_1)i = x_2 + y_2 i,$$

und ebenso

$$x + yi - (x_2 + y_2 i) = (x - x_2) + (y - y_2)i = x_1 + y_1 i.$$

Man subtrahiert eine Strecke von einer anderen, indem man die entgegengesetzte (oder negative) Strecke zur letzteren addiert.

Digitized by Google

56) Sollen komplexe Größen mit einander multipliziert werden, so betrachte man statt des Ausdrucks

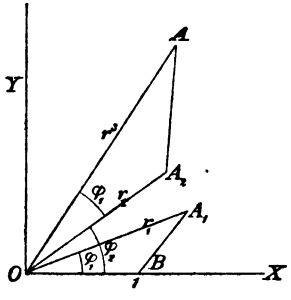
$$(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_2 y_1 + x_1 y_2) i$$

besser den in der reducierten Form darstgestellten

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$
$$= r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

wo $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ und $r = r_1 r_2$ ist. Man erkennt sofort Folgendes: Der neue absolute Betrag $r = r_1 r_2$ wird konstruiert mit Hülfe der Proportion $1 : r_1 = r_2 : r$, womit gesagt ist, daß r aus r_2 ebenso entsteht, wie r_1 aus 1; die neue Abweichung $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ dagegen ist die Summe der beiden gegebenen Abweichungen.

Fig. 104.



Dies kommt geometrisch auf Folgendes hinaus. Sollen die Strecken OA_1 und OA_2 mit einander multipliziert werden, so verbinde man 1 mit A_1, was das Dreieck OBA_1 giebt. Macht man nun $\triangle OA_2A \sim \triangle OBA_1$, so ist $1 : r_1 = r_2 : r$, also $r = r_1 r_2$, und $\sphericalangle BOA = \varphi = \varphi_2 + \varphi_1$.

Man merke also: Bei der Multiplikation komplexer Zahlen mit einander werden die absoluten Beträge mit einander multipliziert, die Abweichungen dagegen zu einander addiert.

Wird demnach eine komplexe Zahl mit einer reellen multipliziert, so wird nur der absolute Betrag, nicht aber die Richtung beeinflußt. Wird dagegen eine komplexe Zahl nur mit einem Ausdrucke $(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ multipliziert, so wird nicht der absolute Betrag, sondern nur die Richtung geändert. Der Name Richtungskoefficient ist also sehr bezeichnend.

57) Auch bei der Division benutzt man die reducierten Formen, denn dabei ist

$$\frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r}{r_2}[\cos(\varphi - \varphi_2) + i\sin(\varphi - \varphi_2)]$$
$$= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$

wo $r_1 = \frac{r}{r_2}$ und $\varphi_1 = \varphi - \varphi_2$ ist. Also: Bei der Division einer komplexen Zahl durch eine andere wird der absolute

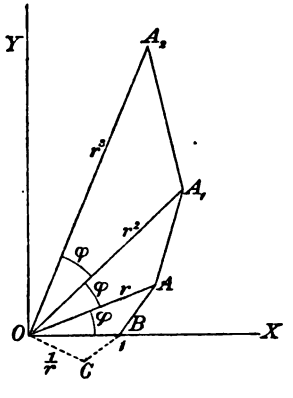
Digitized by Google

Betrag der ersteren durch den der letzteren dividiert, von der Abweichung der ersteren aber wird die der anderen abgezogen.

Soll also die Strecke OA durch die Strecke OA_2 dividiert werden, so bildet man das Dreieck OAA_2 und zeichnet über $OB = 1$ das ähnliche Dreieck OBA_1. Dann ist OA_1 die gesuchte Strecke, denn es ist $1 : r_1 = r_2 : r$, also $r_1 = \frac{r}{r_2}$, und zugleich ist $\varphi_1 = (\varphi - \varphi_2)$.

58) Bei der Potenzierung mit ganzen positiven Exponenten handelt es sich um lauter gleiche Faktoren. Bildet man von $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ zuerst die 2te, dann die 3te, 4te u. s. w. Potenz, so sind die neuen absoluten Beträge $r^2, r^3, r^4 \cdots$, die neuen Abweichungen $2\varphi, 3\varphi, 4\varphi$ u. s. w. Dem wird genügt, wenn man wie in Fig. 105 an das Dreieck OBA das ähnliche OAA_1, an dieses das ähnliche OA_1A_2 u. s. w. anlegt.

Fig. 105.



Setzt man die Dreiecksreihe auch rückwärts fort, so erhält man erst

$$OC = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$$
$$= r^{-1}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-1},$$

dann $r^{-2}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-2}$ u. s. w., so daß auch das Potenzieren mit negativen ganzen Exponenten geometrisch veranschaulicht ist.

Ist $r = 1$, handelt es sich also nur um die Potenzierung von $(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, so werden die Dreiecke gleichschenklig und kongruent, die Punkte $A, A_1, A_2 \cdots$ liegen dann auf der Peripherie des mit Radius 1 um O geschlagenen Kreises (Einheitskreis). Ist dabei $\varphi = \frac{2\pi}{n}$, wo n eine ganze positive Zahl ist, so giebt die n-malige Potenzierung ein regelmäßiges n-Eck. Bei fortgesetzter Potenzierung wiederholen sich die Ecken, so daß eine Art von Periodicität stattfindet.

(Während jetzt die Punkte A auf einem Kreise liegen, liegen sie bei dem obigen allgemeinen Falle auf einer Kurve, die man als logarithmische Spirale bezeichnet. Vergl. Nr. 16 und Fig. 99.)

Digitized by Google

59) Beim Wurzelausziehen behandele man zunächst die n^{te} Wurzel aus der Einheit, wobei n ganz und positiv sein soll. Die Einheit läßt sich in beliebig vielen reducierten Formen schreiben, denn es ist

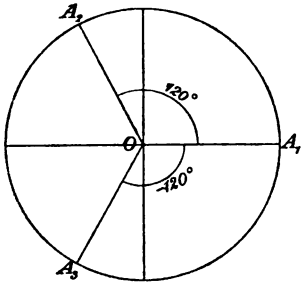
$$1 = \cos 0 + i \sin 0 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = \cos 4\pi + i \sin 4\pi$$
$$= \cos 6\pi + i \sin 6\pi \quad \text{u. s. w.}$$

Bildet man für jede Schreibweise die n^{te} Wurzel, so erhält man nach 48c) für $\sqrt[n]{1}$ der Reihe nach die Werte:

$$\cos\frac{0}{n} + i \sin\frac{0}{n} = 1, \quad \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n},$$
$$\cos\frac{4\pi}{n} + i \sin\frac{4\pi}{n}, \quad \cdots, \quad \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i \sin\frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Setzt man die Reihe weiter fort, so decken sich die Punkte mit den so eben bestimmten. Folglich: Ist n eine positive ganze Zahl, so hat $\sqrt[n]{1}$ im Ganzen n verschiedene Werte. Die Punkte, die denselben entsprechen, liegen auf dem Einheitskreise und bilden ein regelmäßiges n-Eck, zu dessen Ecken auch der Punkt $+1$ gehört.

Fig. 106.



Ist n eine gerade Zahl, so gehört auch -1 zu den Wurzelwerten.

So hat z. B. die Quadratwurzel aus der Einheit die Werte

$$\cos 0 + i \sin 0 = 1,$$
$$\cos \pi + i \sin \pi = -1.$$

Dagegen hat $\sqrt[3]{1}$ die Werte

$$\cos 0 + i \sin 0 = 1,$$
$$\cos 120^0 + i \sin 120^0 = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{i}{2}\sqrt{3},$$
$$\cos 240^0 + i \sin 240^0 = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{i}{2}\sqrt{3}.$$

Die drei Wurzelwerte bilden ein gleichseitiges Dreieck $A_1 A_2 A_3$. $\sqrt[4]{1}$ hat die Werte $+1, +i, -1, -i$.

Aufgabe.

Bilde die 5 Werte für $\sqrt[5]{1}$ und stelle sie geometrisch dar.

" " 6 " " $\sqrt[6]{1}$ " " " " "

" " 10 " " $\sqrt[10]{1}$ " " " " "

Digitized by Google

Die Auflösung z. B. der ersten Aufgabe giebt (mit Hülfe des goldenen Schnittes und der Berechnung des regelmäßigen Fünfecks) die Werte

$$x_1 = 1, \quad \begin{cases} x_2 \\ x_3 \end{cases} = \frac{(-1+\sqrt{5}) \pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\begin{cases} x_4 \\ x_5 \end{cases} = \frac{(-1-\sqrt{5}) \pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

60) Ist $\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$ zu bilden, so ist zu beachten, daß unter der Wurzel ebensogut stehen könnte $r[\cos(\varphi+2\pi)+i\sin(\varphi+2\pi)]$, $r[\cos(\varphi+4\pi)+i\sin(\varphi+4\pi)]$, $r[\cos(\varphi+6\pi)+i\sin(\varphi+6\pi)]$ u. s. w. Demnach giebt es auch hier n verschiedene Wurzelwerte, nämlich

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right), \quad \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi}{n}\right),$$

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+4\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+4\pi}{n}\right) \quad \text{u. s. w.}$$

Die entsprechenden Punkte liegen sämtlich auf einem Kreise mit Radius $\sqrt[n]{r}$ und bilden ein regelmäßiges n-Eck. Hat man also einen der Werte geometrisch bestimmt, so ergeben sich die andern von selbst.

Da $\sqrt{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)} = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$ ist, so findet man die Quadratwurzel aus einer complexen Zahl geometrisch, indem man die Abweichung φ halbiert und als absoluten Betrag die mittlere Proportionale zwischen 1 und r bestimmt, denn es ist $1:\sqrt{r} = \sqrt{r}:r$.

$\sqrt[3]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)} = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{3}+i\sin\frac{\varphi}{3}\right)$ kann im allgemeinen nicht genau mit Zirkel und Lineal konstruiert werden, schon weil die allgemeine Dreiteilung des Winkels mit diesen Hülfsmitteln nicht möglich ist.

Dagegen lassen sich die 4ten, 8ten, 16ten, ..., $(2^n)^{\text{ten}}$ Wurzeln genau konstruieren, folglich auch ihre ganzzahligen Potenzen, z. B. $(x+yi)^{\frac{3}{4}}$, $(x+yi)^{\frac{5}{8}}$, $(x+yi)^{\frac{3}{16}}$ u. s. w. (Daher kann man auch beliebig viele Punkte der in Figur 105 angedeuteten logarithmischen Spirale genau konstruieren).

Auf das Potenzieren mit irrationalen und complexen Exponenten soll hier nicht eingegangen werden.

61) Die Gleichungen von der Form $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n = 1$ oder auch $x^n = r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ werden als binomische Gleichungen n^{ten} Grades bezeichnet.

Digitized by Google

Handelt es sich um

$$x^n = r = r(\cos 0 + i \sin 0) = r(\cos 2\pi + i \sin 2\pi)$$
$$= r(\cos 4\pi + i \sin 4\pi) = \cdots,$$

wo r reell ist, so liegt das n-Eck der Wurzelpunkte mit den Ecken auf dem Kreise, der mit Radius $\sqrt[n]{r}$ um den Nullpunkt geschlagen ist, und zwar liegt es symmetrisch gegen die reelle Achse. Ist also eine der Wurzeln von der Form $a + bi$, so existiert noch eine symmetrische von der Form $a - bi$. Sowohl die Summe, als auch das Produkt der symmetrischen Wurzeln ist reell, nämlich $2a$ bezw. $a^2 + b^2$. Je zwei so zusammen gehörende Wurzeln werden als konjugierte Wurzeln bezeichnet.

(Die höhere Mathematik zeigt, daß jede Gleichung n^{ten} Grades mit einer Unbekannten und mit reellen Koefficienten n Wurzeln hat, von denen die complexen (und rein imaginären) paarweise konjugiert vorhanden sind. Am speziellen Falle der binomischen Gleichungen sieht man, wie dies zu verstehen ist.)

VIII. Reciproke Gleichungen und Anwendung derselben auf reducierbare Gleichungen höheren Grades.

62) Es handelt sich hier um Gleichungen n^{ten} Grades (n ganz und positiv) mit einer Unbekannten x. Setzt man in einer solchen Gleichung den reciproken Wert $\frac{1}{x}$ statt x ein, so entsteht in der Regel eine ganz andere Gleichung, die man wieder als solche mit ganzen Potenzen von x umformen kann. Bisweilen erhält man aber dabei die ursprüngliche Gleichung unverändert wieder. Gleichungen, die bei der Einführung von $\frac{1}{x}$ statt x ihre Form nicht ändern, heißen reciproke Gleichungen.

So ist z. B. $3x^2 - 4x + 3 = 0$ eine reciproke Gleichung, denn bei der besprochenen Umwandelung entsteht $\frac{3}{x^2} - \frac{4}{x} + 3 = 0$, oder $3 - 4x + 3x^2 = 0$, d. h. $3x^2 - 4x + 3 = 0$, wie vorher. Man erkennt dies bequemer, wenn man beide Seiten der ersten Gleichung durch x dividiert, sie also in folgender Form schreibt:

$$3x - 4 + \frac{3}{x} = 0.$$

Digitized by Google

Dies ist symmetrisch in Bezug auf x und $\frac{1}{x}$, so daß die Vertauschung dieser beiden Größen nichts ändert. Die Gleichung läßt sich auch schreiben: $3\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$, so daß sie sich, wenn man für $x+\frac{1}{x}$ die Unbekannte u einführt, auf $3u-4=0$ reduciert, woraus $u=\frac{4}{3}$, also $x+\frac{1}{x}=\frac{4}{3}$ folgt.

63) Es wird sich zeigen, daß die Einführung neuer Unbekannten für die reciproken Ausdrücke $x+\frac{1}{x}$, $x^2+\frac{1}{x^2}$, $x^3+\frac{1}{x^3}$ u. s. w. die Lösung gewisser Gleichungen höheren Grades ermöglicht. Diese Ausdrücke hängen aber folgendermaßen zusammen. Aus

1) $$y+\frac{1}{y}=u$$

folgt durch beiderseitiges Quadrieren $y^2+2+\frac{1}{y^2}=u^2$, oder

2) $$y^2+\frac{1}{y^2}=u^2-2.$$

Durch Multiplikation erhält man aus 1) und 2) $\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)=\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)=u^3-2u$, also mit Hülfe von 1)

3) $$y^3+\frac{1}{y^3}=u^3-3u=u(u^2-3).$$

Aus 1) und 3) folgt durch Multiplikation $\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)=\left(y^4+\frac{1}{y^4}\right)+\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)=u^4-3u^2$, also mit Hülfe von 2)

4) $$y^4+\frac{1}{y^4}=u^4-4u^2+2.$$

Aus 1) und 4) folgt ebenso $\left(y^5+\frac{1}{y^5}\right)+\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)=u^5-4u^3+2u$, also mit Hülfe von 3)

5) $$y^5+\frac{1}{y^5}=u^5-5u^3+5u=u(u^4-5u^2+5),$$

u. s. w.

64) Als reciproke Gleichungen lassen sich zunächst die folgenden mit symmetrischen Koefficienten behafteten betrachten:

Digitized by Google

$$x^3 + ax^2 + ax + 1 = 0,$$
$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0,$$
$$x^5 + ax^4 + bx^3 + bx^2 + ax + 1 = 0,$$
u. s. w.

Es wird sich zeigen, daß jede solche Gleichung von $2n^{\text{ten}}$ bezw. $(2n+1)^{\text{ten}}$ Grade durch die obigen Substitutionen (Einsetzungen) auf den n^{ten} Grad zurückgeführt werden kann.

65) **Aufgabe.** Die Gleichung $x^3 + ax^2 + ax + 1 = 0$ zu lösen.

Auflösung. Setzt man y^2 für x ein, so erhält man die Gleichung 6ten (also geraden) Grades

$$y^6 + ay^4 + ay^2 + 1 = 0,$$

also bei Division durch y^3

$$y^3 + ay + \frac{a}{y} + \frac{1}{y^3} = 0$$

oder

$$\left(y^3 + \frac{1}{y^3}\right) + a\left(y + \frac{1}{y}\right) = 0.$$

Setzt man $y + \frac{1}{y} = u$, also nach 63) $y^3 + \frac{1}{y^3} = u^3 - 3u$, so hat man

$$u^3 - 3u + au = 0$$

oder

$$u(u^2 - 3 + a) = 0.$$

Demnach ist entweder $u = 0$, d. h. $y + \frac{1}{y} = 0$, d. h. $y^2 = -1$, also $x_1 = -1$, oder es ist $u^2 - 3 + a = 0$, d. h. $u^2 = 3 - a$, also $u^2 - 2 = 1 - a$, $y^2 + \frac{1}{y^2} = 1 - a$, $x + \frac{1}{x} = 1 - a$, $x^2 - (1-a)x = -1$, $\left.\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\} = \frac{1-a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-a}{2}\right)^2 - 1}$, womit die drei Lösungen der gegebenen Gleichung 3ten Grades gefunden sind.

66) Die reciproke Gleichung 4ten Grades

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

geht bei beiderseitiger Division durch x^2 über in

$$x^2 + ax + b + \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

Digitized by Google

oder in

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0.$$

Die Einsetzung von $x + \frac{1}{x} = u$ und $x^2 - \frac{1}{x^2} = u^2 - 2$ (vgl. 63) giebt

$$u^2 - 2 + au + b = 0.$$

Die Auflösung giebt die beiden Werte

$$\left.\begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix}\right\} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b + 8}}{2}.$$

Hierauf sind die Gleichungen $x + \frac{1}{x} = u_1$ und $x + \frac{1}{x} = u_2$ zu behandeln, deren jede zwei Lösungen giebt,

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b + 8} \pm \sqrt{(-a + \sqrt{a^2 - 4b + 8})^2 - 16}}{4},$$

$$\left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b + 8} \pm \sqrt{(-a - \sqrt{a^2 - 4b + 8})^2 - 16}}{4}.$$

67) In

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

setze man y^2 für x ein, also

$$y^{10} + ay^8 + by^6 + by^4 + ay^2 + 1 = 0,$$

oder bei Division durch y^5

$$y^5 + ay^3 + by + \frac{b}{y} + \frac{a}{y^3} + \frac{1}{y^5} = 0,$$

oder

$$\left(y^5 + \frac{1}{y^5}\right) + a\left(y^3 + \frac{1}{y^3}\right) + b\left(y + \frac{1}{y}\right) = 0.$$

Setzt man

$$y + \frac{1}{y} = u, \text{ also } y^3 + \frac{1}{y^3} = u^3 - 3u, \; y^5 + \frac{1}{y^5} = u^5 - 5u^3 + 5u,$$

so entsteht

$$u[u^4 - 5u^2 + 5 + a(u^2 - 3) + b] = 0,$$

also ist entweder

$$u = 0, \text{ d. h. } y + \frac{1}{y} = 0, \; y^2 = -1, \; x_1 = -1,$$

oder

Digitized by Google

$$u^4 - u^2(5-a) = 3a - b - 5,$$

d. h. $$u^2 = \frac{5-a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5-a}{2}\right)^2 + 3a - b - 5}.$$

Die rechte Seite ist gleich $y^2 + \frac{1}{y^2} + 2$ zu setzen, so daß man hat

$$x + \frac{1}{x} = \left[\frac{5-a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5-a}{2}\right)^2 + 3a - b - 5} - 2\right],$$

woraus sich die übrigen vier Lösungen ergeben.

68) Die Gleichungen

$$x^3 + ax^2 - ax - 1 = 0,$$
$$x^4 + ax^3 + bx^2 - ax + 1 = 0,$$
$$x^5 + ax^4 + bx^3 - bx^2 - ax - 1 = 0$$

sind zwar keine reciproken, würde man aber in der ersten und dritten $-x_1$ statt x einsetzen, in der zweiten $x_1\sqrt{-1}$ statt x, so würden sie in solche übergehen. Bei der ersten und dritten führt man direkt y^2 für x ein und dividiert dann durch y^3 bezw. y^5. In der zweiten dividiert man direkt durch x^2. Die nun anzuwendenden Substitutionen ergeben sich aus der Gleichungsfolge

$$y - \frac{1}{y} = u, \quad y^2 + \frac{1}{y^2} = u^2 + 2, \quad y^3 - \frac{1}{y^3} = u^3 + 3u,$$

$$y^4 + \frac{1}{y^4} = u^4 + 4u^2 + 2, \quad y^5 - \frac{1}{y^5} = u^5 + 5u^3 + 5u,$$

die ebenso wie die in 63) angegebene abzuleiten ist.

So kann man z. B. statt $x^3 - 1 = 0$ schreiben $y^6 - 1 = 0$ oder $y^3 - \frac{1}{y^3} = 0$, d. h. $u^3 + 3u = 0$, $u(u^2 + 3) = 0$, so daß entweder $u = 0$ d. h. $y - \frac{1}{y} = 0$, oder $u^2 = -3$ d. h. $u = \pm\sqrt{-3}$, d. h. $y - \frac{1}{y} = \pm\sqrt{-3}$ ist. So findet man ebenso, wie früher, als dritte Wurzeln aus der Einheit die Werte

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad x_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Hier ist zu beachten, daß $x_2 x_3 = 1$, also auch $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 1$ ist, während $\frac{1}{x_2} = x_3 = x_2^2$ und $\frac{1}{x_3} = x_2 = x_3^2$ ist.

Ebenso kann man die Gleichung $x^5 - 1 = 0$ behandeln und die 5 fünften Wurzeln aus der Einheit ableiten.

Digitized by Google

70) In Abschnitt 63) war $y + \frac{1}{y} = u$ und daher $y^3 + \frac{1}{y^3} = u^3 - 3u$. Folglich geht die häufig vorkommende Gleichung 3ten Grades

$$x^3 - 3x = 2a,$$

wo a reell ist, durch die Substitution $x = y + \frac{1}{y}$ über in

$$y^3 + \frac{1}{y^3} = 2a.$$

Betrachtet man hier y^3 als Unbekannte, so ergiebt sich als Lösung der für y^3 quadratischen Gleichung $y^6 - 2ay^3 = -1$ der Wert $y^3 = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$. Des reciproken Charakters halber ist auch $\frac{1}{y^3} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$. Da aber $y^3 + \frac{1}{y^3} = 2a$ sein muß, so gehören zusammen die Lösungen $y^3 = a + \sqrt{a^2 - 1}$ und $\frac{1}{y^3} = a - \sqrt{a^2 - 1}$, welches letztere in der That gleich $\frac{1}{a + \sqrt{a^2 - 1}}$ ist. Bei $y^3 + \frac{1}{y^3}$ kommt es also nur auf den einen Wert $(a + \sqrt{a^2 - 1}) + (a - \sqrt{a^2 - 1})$ an, denn die Änderung des Wurzelzeichens würde dasselbe wiedergeben. Die endgültige Lösung der Gleichung $x^3 - 3x = 2a$ kann jetzt zunächst geschrieben werden als

$$x = y + \frac{1}{y} = \sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 - 1}}}.$$

Sind nun w_1, w_2 und w_3 die Wurzelwerte der Gleichung $w = \sqrt[3]{1}$, so erhält man alle drei möglichen Lösungen in der Form

$$x = w\sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \frac{1}{w\sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 - 1}}}$$

$$= w\sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \frac{1}{w}\sqrt[3]{a - \sqrt{a^2 - 1}},$$

wo für w der Reihe nach zu setzen ist $w_1 = 1$, $w_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $w_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

71) Über das Resultat sind einige Bemerkungen nötig.

a) Ist a reell und > 1, so steht unter beiden Kubikwurzeln Reelles, demnach hat jede der Kubikwurzeln unter ihren Werten einen reellen Wert ξ bezw. ξ_1. Die drei Lösungen sind dann:

Digitized by Google

$$x_1 = w_1\xi + \frac{1}{w_1}\xi_1 = \xi + \xi_1,$$

$$x_2 = w_2\xi + \frac{1}{w_2}\xi_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\xi + \frac{2}{-1+i\sqrt{3}}\xi_1$$

$$= \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\xi + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\xi_1 = \frac{-(\xi+\xi_1)+i\sqrt{3}(\xi-\xi_1)}{2},$$

$$x_3 = w_3\xi + \frac{1}{w_3}\xi_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\xi + \frac{2}{-1-i\sqrt{3}}\xi_1$$

$$= \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\xi + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\xi_1 = \frac{-(\xi+\xi_1)-i\sqrt{3}(\xi-\xi_2)}{2}.$$

Die erste Lösung ist also reell, die zweite und dritte sind konjugiert komplex.

b) Ist dagegen a reell und < 1, so steht unter beiden Kubikwurzeln Komplexes, denn man kann schreiben $\sqrt[3]{a+i\sqrt{1-a^2}}$ bezw. $\sqrt[3]{a-i\sqrt{1-a^2}}$. Man erhält in reducierter Schreibweise als Lösung

$$x = y + \frac{1}{y} = \sqrt[3]{r}\left[\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right] + \frac{1}{\sqrt[3]{r}\left[\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right]},$$

wo $r = \sqrt{a^2 + (1-a^2)} = \sqrt{1} = 1$ und $\varphi = \arctan\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$ [lies arcus tangens $\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$, was den Bogen bedeuten soll, dessen Tangente gleich $\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$ ist], oder noch einfacher $\cos\varphi = \frac{a}{1} = a$ also $\varphi = \arccos a$ ist. Also ist die eine Lösung von der Form

$$x = \left[\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right] + \frac{1}{\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}}$$

$$= \left[\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right] + \left[\cos\frac{\varphi}{3} - i\sin\frac{\varphi}{3}\right] = 2\cos\frac{\varphi}{3}.$$

Sämtliche 3 Lösungen aber sind gegeben durch die reellen Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2\cos\frac{\varphi}{3} \\ x_2 &= 2\cos\frac{\varphi+2\pi}{3} = -2\cos\frac{\pi-\varphi}{3} \\ x_3 &= 2\cos\frac{\varphi+4\pi}{3} = -2\cos\frac{\pi+\varphi}{3} \end{aligned}\right\} \text{ wo } \varphi \text{ aus der Gleichung } \cos\varphi = a \text{ bestimmt wird,}$$

oder auch

$$x_1 = 2\cos\frac{\varphi^0}{3},\quad x_2 = -2\cos\left(60^0 - \frac{\varphi^0}{3}\right),\quad x_3 = -2\cos\left(60^0 + \frac{\varphi^0}{3}\right).$$

Digitized by Google

Versuche für beide Fälle nachzuweisen, daß $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -3$ und $x_1x_2x_3 = 2a$ ist.

72) Ebenso ist die Gleichung $x^3 + 3x = 2a$ durch die Substitution $x = y - \frac{1}{y}$ auf entsprechende Form zu bringen, aus der sich als Wurzeln die in

$$x = w\sqrt[3]{\sqrt{a^2+1}+a} - \frac{1}{w}\sqrt[3]{\sqrt{a^2+1}-a}$$

enthaltenen drei Werte ergeben, über die sich ähnliche Betrachtungen anstellen lassen.

Auch die Gleichungen $x^5 - 5x^3 + 5x = 2a$ und $x^5 + 5x^3 + 5x = 2a$ lassen sich durch die Substitutionen $x = y + \frac{1}{y}$ bezw. $x = y - \frac{1}{y}$ lösen.

73) Durch Obiges ist auch die allgemeine kubische Gleichung erledigt. Es läßt sich nämlich statt

$$x^3 + 3\alpha x^2 + 3\beta x + \gamma = 0$$

schreiben:

$$[(x+\alpha)^3 - 3\alpha^2 x - \alpha^3] + 3\beta x + \gamma = 0.$$

Setzt man hier $x + \alpha = y$, also $x = y - \alpha$, so entsteht die kubische Gleichung ohne quadratisches Glied

$$y^3 - 3y(\alpha^2 - \beta) = [3\alpha\beta - 2\alpha^3 - \gamma],$$

also eine Gleichung von der Form

$$y^3 - 3ky = 2b.$$

Bei positivem k setze man $y = u\sqrt{k}$, bei negativem k dagegen $y = u\sqrt{-k}$ ein. Dann entstehen beziehungsweise die Gleichungen

$$u^3 - 3u = \frac{2b}{\sqrt{k^3}}, \quad u^3 + 3u = \frac{2b}{\sqrt{-k^3}}.$$

Beide Formen sind schon in Abschnitt 70 bis 72 behandelt. Die Wurzeln der ersteren z. B. sind in

$$u = w\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2-1}} + \frac{1}{w}\sqrt[3]{a-\sqrt{a^2-1}}$$

enthalten, wo $a = \frac{2b}{\sqrt{k^3}} = \frac{3\alpha\beta - 2\alpha^3 - \gamma}{\sqrt{(\alpha^2-\beta)^3}}$ ist.

Aus u berechnet man $y = u\sqrt{k}$, daraus $x = y - a$.

Digitized by Google

74) **Beispiel.** In $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ ist $\alpha = -3$, $\beta = \frac{26}{3}$, $\gamma = -24$, also $k = \alpha^2 - \beta = 9 - \frac{26}{3} = \frac{1}{3}$, $3\alpha\beta - 2\alpha^3 - \gamma = -78 + 54 + 24 = 0 = 2b$, also $\frac{2b}{\sqrt{k^3}} = 0$. Da k positiv ist, handelt es sich um den ersten der beiden Fälle d. h. um $u^3 - 3u = 0$ oder $u(u^2 - 3) = 0$, woraus folgt $u_1 = 0$, $u_2 = +\sqrt{3}$, $u_3 = -\sqrt{3}$; also $y_1 = 0\sqrt{k} = 0$, $y_2 = \sqrt{3}\sqrt{k} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = 1$, $y_3 = -\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = -1$, so daß $x_1 = y_1 - \alpha = 0 + 3 = 3$, $x_2 = y_2 - \alpha = 1 + 3 = 4$, $x_3 = y_3 - \alpha = -1 + 3 = 2$ ist. Hier also vereinfachte sich die Rechnung durch das Wegfallen der rechten Seite der Hülfsgleichung.

75) **Beispiel.** In $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$ ist

$$\alpha = -\frac{10}{3},\quad \beta = \frac{31}{3},\quad \gamma = -30;$$

folglich
$$\alpha^2 - \beta = \frac{100}{9} - \frac{93}{9} = \frac{7}{9} = k;$$

$$3\alpha\beta - 2\alpha^3 - \gamma = -\frac{2790}{27} + \frac{2000}{27} + \frac{810}{27} = \frac{20}{27} = 2b,$$

also
$$\frac{2b}{\sqrt{k^3}} = \frac{2 \cdot 10}{27\sqrt{\frac{343}{729}}} = \frac{2 \cdot 10}{\sqrt{343}}.$$

Da k positiv ist, handelt es sich um

$$u^3 - 3u = \frac{2 \cdot 10}{\sqrt{343}},$$

wo $\frac{10}{\sqrt{343}} = a$ zu setzen ist.

Die eine Lösung ist enthalten in

$$u = \sqrt[3]{\frac{10}{\sqrt{343}} + \sqrt{\frac{100}{343} - 1}} + \sqrt[3]{\frac{10}{\sqrt{343}} - \sqrt{\frac{100}{343} - 1}}$$

$$= \sqrt[3]{\sqrt{\frac{100}{343}} + i\sqrt{\frac{243}{343}}} + \sqrt[3]{\sqrt{\frac{100}{343}} - i\sqrt{\frac{243}{343}}}.$$

Es ist der Fall mit drei reellen Lösungen, der auf $u_1 = 2\cos\frac{\varphi}{3}$ führt, wo sich φ aus $\cos\varphi = \frac{10}{\sqrt{343}}$ bestimmt. Es ergiebt sich $\varphi = 57^0\,19'\,11'',4$, $\frac{\varphi}{3} = 19^0\,6'\,25'',8$, $\lg\cos\frac{\varphi}{3} + \lg 2 = 0{,}2764215$, also $u_1 = 1{,}889825$, $y_1 = \sqrt{k}\,u_1 = \frac{u_1}{3}\sqrt{7} = \frac{1{,}889825\sqrt{7}}{3} = \frac{5}{3}$, endlich $x_1 = y_1 - \alpha = \frac{5}{3} + \frac{10}{3} = 5$.

Suche die beiden anderen Wurzeln selbst nach den früheren

Digitized by Google

Formeln $u = -2\cos\left(60^0 \pm \frac{\varphi^0}{3}\right)$, was auf $x_2 = 3$ und $x_3 = 2$ führt, oder wende die folgende Überlegung an.

76) Man kann die Gleichung 3ten Grades, deren Wurzeln x_1, x_2 und x_3 sein sollen, sofort hinschreiben als

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0,$$

denn dieser Gleichung ist sowohl für $x = x_1$, als auch für $x = x_2$ und für $x = x_3$ genügt. Dies läßt sich schreiben als

$$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3 = 0.$$

Vergleicht man dies mit

$$x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0,$$

so ergiebt sich, daß

$$\alpha = x_1 + x_2 + x_3$$

gleich der Summe der Wurzeln ist,

$$\beta = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$$

gleich der Summe der Produkte aus je zwei Wurzeln,

$$\gamma = x_1x_2x_3$$

gleich dem Produkte der drei Wurzeln. So ist im vorigen Beispiele, wo $x_1 = 5$ bereits berechnet war,

$$x_2 + x_3 = \alpha - 5 = 10 - 5 = 5$$

$$x_2x_3 = \frac{\gamma}{5} = \frac{30}{5} = 6.$$

Die Auflösung dieser beiden Gleichungen giebt $x_2 = 3$ und $x_3 = 2$.

77) Man kann aber auch folgendermaßen verfahren: Die linke Seite

$$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3$$

muß, da sie mit

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

identisch ist, durch $(x - x_1)$ ohne Rest teilbar sein, und durch die Teilung auf den 2ten Grad zurückgeführt werden.

So ist im obigen Beispiele, wo $x_1 = 5$ gefunden war,

$$x^3 - 10x^2 + 31x - 30 : (x - 5) = x^2 - 5x + 6$$
$$x^3 - 5x^2$$
$$\underline{\quad -5x^2 + 31x}$$
$$\underline{\quad -5x^2 + 25x}$$
$$\underline{\qquad 6x - 30}$$
$$\underline{\qquad 6x - 30}$$

Aus $x^2 - 5x + 6 = 0$ folgen als fernere Lösungen $x_2 = 3$ und $x_3 = 2$.

Digitized by Google

Man kann die obige Gleichung $x^3 - 3ax = b$ auch ohne Hülfe der reciproken Gleichungen lösen, jedoch soll dies und die Lehre von den Gleichungen 4ten Grades vorläufig aufgeschoben bleiben.

Beispiele für die Gleichungen dritten Grades bietet die Stereometrie in Menge. Die Formel für das Kugelsegment z. B. ist

$$J = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h) = \frac{\pi h}{6}(3a^2 + h^2).$$

Demnach führt die Aufgabe, die Höhe h zu finden, durch die ein Kugelsegment von gegebenem r (bezw. gegebenem a) einen vorgeschriebenen Inhalt J erhält, auf eine Gleichung dritten Grades, z. B. auf

$$x^3 + 3a^2x = \frac{6J}{\pi}, \quad \text{oder auf} \quad x^3 - 3rx^2 = -\frac{3J}{\pi}.$$

Ebenso folgende Aufgabe: Wie tief taucht eine gegebene Kugel von gegebenen specifischem Gewicht p' $(p' < 1)$ ins Wasser ein?

Dieselbe Aufgabe läßt sich auch auf die Halbkugel, das Kugelsegment, die Kugelschicht und den Kugelsektor ausdehnen. Bei der Halbkugel z. B. kann man noch die Fälle unterscheiden, ob sie mit der Grundebene voran oder mit der Wölbung voran eintauchen soll.

IX. Einiges über Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

78) Die allgemeine Form der Gleichungen 2ten Grades mit zwei Unbekannten ist die folgende:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$
$$a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0.$$

Dabei sind die Glieder mit x^2, mit xy und mit y^2 solche, die das Unbekannte in der 2ten Potenz enthalten. Die übrigen enthalten es in der 1ten Potenz oder gar nicht.

Berechnet man y aus der einen Gleichung, und setzt man den Wert in die andere ein, so entsteht eine Gleichung 4ten Grades für x allein. Da die Lösung solcher Gleichungen noch nicht gelehrt werden soll, ist auch die Bestimmung der Unbekannten aus den obigen Gleichungen vorläufig nicht möglich. Zu jedem Werte von x gehört ein bestimmter von y, so daß man stets vier Wertepaare erhält, die nicht durcheinander gemischt werden dürfen.

Digitized by Google

Es giebt aber häufig vorkommende Spezialformen, bei denen die Gleichungen sich auf einfachere zurückführen lassen. Abgesehen von den auf der Hand liegenden Vereinfachungen mögen einige Methoden der Reduktion behandelt werden.

1) $$\begin{cases} x^2 + xy = a, \\ y^2 + xy = b. \end{cases}$$

Addition giebt $x^2 + y^2 + 2xy = a + b$, also $x + y = \sqrt{a + b}$. Das Weitere ist einfach.

Oder: man schreibe

$$x(x + y) = a,$$
$$y(x + y) = b.$$

Division giebt $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ u. s. w.

2) $$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ xy = b. \end{cases}$$

Man bilde $2xy = 2b$, vereinige dies durch Addition bezw. Subtraktion mit $x^2 + y^2 = a$, was $x^2 + y^2 + 2xy = a + 2b$ bezw. $x^2 + y^2 - 2xy = a - 2b$ giebt. Aus beiden Gleichungen folgt

$$x + y = \sqrt{a + 2b},$$
$$x - y = \sqrt{a - 2b},$$

u. s. w.

3) $$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a, \\ x^2 - xy + y^2 = b. \end{cases}$$

Addition giebt $x^2 + y^2 = \frac{a + b}{2}$, Subtraktion giebt $2xy = a - b$, Fortsetzung ähnlich, wie bei 2).

4) $$\begin{cases} x^3 + y^3 = a, \\ x^2 - xy + y^2 = b. \end{cases}$$

$x^3 + y^3$ ist zerlegbar in $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$, so daß $(x + y)b = a$ ist u. s. w.

5) $$\begin{cases} x^3 - y^3 = a, \\ x^2 + xy + y^2 = b. \end{cases}$$

$x^3 - y^3$ ist zerlegbar in $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$.

6) $$\begin{cases} x^3 + y^3 = a, \\ xy(x + y) = b. \end{cases}$$

Digitized by Google

Nach der letzteren Gleichung ist $3x^2y + 3xy^2 = 3b$, was sich mit der ersten zu

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = a + 3b \quad \text{oder} \quad (x+y)^3 = a + 3b$$

vereinigen läßt, so daß $x + y = \sqrt[3]{a + b}$ ist.

7) $$\begin{cases} x^3 - y^3 = a, \\ xy(x - y) = b. \end{cases}$$

Ähnlich, wie vorher, erhält man $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = a - 3b$, also $x - y = \sqrt[3]{a - 3b}$.

8) $$\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = a, \\ x^2 + xy + y^2 = b. \end{cases}$$

Die erste Gleichung läßt sich schreiben als $(x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = a$ oder durch Produktzerlegung als $(x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy) = a$. Durch Division erhält man das Weitere.

9) $$\begin{cases} \dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} = a, \\ x^3 + y^3 = b. \end{cases}$$

Das letztere zerlegt sich in $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = b$, so daß man durch Multiplikation aus beiden Gleichungen $(x + y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = ab$ erhält, wovon sich $x^3 + y^3 = b$ abziehen läßt, u. s. w.

10) $$\begin{cases} ax + by = 2(x^2 - y^2), \\ \dfrac{b}{x - y} - \dfrac{a}{x + y} = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}. \end{cases}$$

Betrachtet man hier zunächst a und b als Unbekannte, so giebt die Multiplikationsmethode $a = \dfrac{x^2 - y^2}{x}$ und $b = \dfrac{x^2 - y^2}{y}$, also $\dfrac{a}{b} = \dfrac{y}{x}$, so daß einfachere Gleichungen, z. B. die beiden letzteren, zur Verfügung stehen.

11) $$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = a, \\ x^2 + y^2 = b. \end{cases}$$

Man kann $\sqrt{x} = v$, also $x^2 = v^4$, $\sqrt{y} = w$, also $y^2 = w^4$ setzen und die Gleichungen $v + w = a$, $v^4 + w^4 = b$ behandeln, wo w leicht zu eliminieren ist.

Digitized by Google

Weitere Aufgaben findet man in den gebräuchlichen Sammlungen. Bisweilen führen nur Kunstgriffe zur Lösung, die vermieden werden könnten, wenn die Gleichungen 4ten Grades schon jetzt zur Verfügung ständen.

79) Gleichungen, wie 11), bei denen die Unbekannten unter irgend welchen Wurzelzeichen stehen, werden als irrationale Gleichungen bezeichnet und kommen hier nur soweit in Betracht, als sie sich auf rationale algebraische Gleichungen zurückführen lassen.

Ebenso wird auf ein Durchnehmen der transcendenten Gleichungen, bei denen die Unbekannte als Potenzexponent vorkommt, z. B. als a^x, b^x u. s. w. (wohin nach Kapitel VI auch $\cos x$, $\sin x$ u. s. w. gehören) verzichtet. Nur auf solche kann hingewiesen werden, die sich in einfacher Weise auf rationale algebraische Hülfsgleichungen zurückführen lassen.

Handelt es sich z. B. um $10^{2x} + a\,10^x = b$, so setze man $10^x = y$, dies giebt $y^2 + ay = b$, also $y = \frac{-a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$, folglich $x = {}^{10}\lg y = {}^{10}\lg \left[-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} \right]$.

Ebenso führt $e^{2x} + ae^x = b$ auf $x = {}^e\lg \left[-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} \right]$.

Von hier aus kann man zu Gleichungen übergehen, die sich durch entsprechende Substitution in reducierbare von höherem Grade verwandeln.

Bei $\cos x + a \sin x = b$ setzt man $\cos x = z$ und findet $z + a\sqrt{1 - z^2} = b$, $a^2(1 - z^2) = (b - z)^2$, bestimmt z und berechnet x mit Hülfe der trigonometrischen Tabellen.

Dagegen sind Gleichungen wie $x + a \cos x = b$ mit elementaren Hülfsmitteln nicht lösbar.

Unten werden unter Nr. 24 der Trigonometrie noch einige goniometrische Gleichungen behandelt.

Digitized by Google

Dritte Abteilung.

Trigonometrie.

I. Verallgemeinerung der Grundbegriffe.

1) Zusammenhang zwischen Bogen und Winkel.

Nach Teil I, Geometrie, 147, gilt für einen Winkel α^0 und den zugehörigen, am Einheitskreise zu messenden Bogen a die Proportion

$$\alpha^0 : 180^0 = a : \pi,$$

wo $\pi = 3{,}141\,592\,65 \cdots$ ist. Daraus folgt

$$\alpha^0 = \frac{a}{\pi} 180^0.$$

Zum Bogen $a = 1$ gehört z. B. der Winkel $\frac{1}{\pi} 180^0 = \frac{180^0}{3{,}141\,59 \cdots}$ $= 57^0\,17'\,44''{,}81 \cdots = 206264''{,}81 \ldots$.

Ebenso ist

$$a = \pi \frac{\alpha^0}{180^0},$$

zum Winkel $\alpha^0 = 1^0$ gehört also der Bogen $\pi \frac{1^0}{180^0} = \frac{\pi}{180} = \frac{3{,}141\,59 \cdots}{180}$ $= 0{,}017\,453 \cdots$.

(In dem Bruche $\frac{\alpha^0}{180^0}$ hebt sich die Gradbenennung genau ebenso weg, wie es mit gleichen arithmetischen Faktoren im Zähler und Nenner geschieht. Man erkennt, daß a und π zunächst unbenannte Zahlen sind, ebenso wie die Zahl $r = 1$.

Setzt man jedoch $r = 1$ Meter, so ist auch der Bogen in Metern dargestellt. Dasselbe gilt von anderen Längeneinheiten, wie Meile, Kilometer, Centimeter u. s. w.)

Digitized by Google

Nach Obigem kann man Tabellen anfertigen, in denen zu jedem Winkel der zugehörige Bogen, zu jedem Bogen der zugehörige Winkel berechnet ist.

Am Kreise mit Radius r gehört zum Winkel 180^0 der Bogen $r\pi$, zum Winkel 1^0 der Bogen $\frac{r\pi 1^0}{180^0} = \frac{r\pi}{180}$, zum Winkel α^0 der Bogen $\frac{r\pi\alpha^0}{180^0} = ra$. Ist r eine unbenannte Zahl, so ist auch dieser Bogen eine unbenannte Zahl. Ist r in einer bestimmten Maßeinheit, z. B. in Metern gegeben, so ist auch der Bogen in diesem Maße gegeben.

Aufgabe. Jeder Äquatorgrad der Erde habe, gestreckt gedacht, 15 Meilen Länge. Wie groß ist der Radius der Erde?

Auflösung. Zum Winkel 1^0 gehört am Kreise mit Radius x der Bogen $x \cdot 0{,}017\,453 \cdots$ Setzt man dies gleich 15, so erhält man $x = \frac{15}{0{,}017\,453 \cdots} =$? Meilen.

Aufgabe. Der scheinbare Sonnendurchmesser beträgt im Mittel 32 Minuten. Wie groß ist der wirkliche Durchmesser, wenn die Entfernung von der Erde zu 20 000 000 Meilen angenommen wird?

Auflösung. Zum Winkel $32' = \frac{32^0}{60}$ gehört bei gegebenem Radius r der Bogen $r\frac{32}{60} \cdot 0{,}017453 \cdots$ Wird $r = 20\,000\,000$ Meilen gesetzt, so erhält man ? Meilen.

Bemerkung. Wenn hier der geradlinige Durchmesser als Bogen berechnet wird, so handelt es sich um einen verschwindend kleinen Fehler, denn der Winkel beträgt nur etwa die Hälfte eines Grades. — Man löse dieselbe Aufgabe für den Mond mit dem scheinbaren Durchmesser $31'$ und nehme 50 000 Meilen oder etwa 60 Erdradien Entfernung an.

2) Die goniometrischen Funktionen werden bisweilen vom Winkel, bisweilen vom Bogen (gemessen am Einheitskreise) abhängig gemacht. So spricht man von $\sin 45^0$ und zugleich von $\sin\frac{\pi}{4}$, was dasselbe ist. Schreibt man also $\sin\alpha$, so ist es ein großer Unterschied, ob die Zahl α einen Bogen in Längeneinheiten, oder einen Winkel in Graden darstellt. Wird unter α ein Bogen verstanden, so soll in der Regel einfach α geschrieben werden; soll dagegen α ein Winkel sein, so soll geschrieben werden α^0.

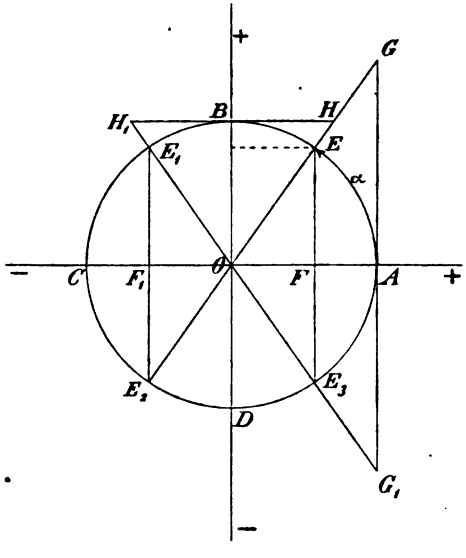
Bei gewissen allgemeinen Betrachtungen ist es nicht nötig, einen Unterschied in der Schreibweise zu machen, wohl aber, wenn es sich um bestimmte Berechnungen handelt. Die Umrechnung ist in jedem

Digitized by Google

Falle einfach, denn es ist z. B. $\sin n^0 = \sin\left(\frac{n\pi}{180}\right)$, dagegen $\sin \widehat{m} = \sin\left(\frac{180\,\widehat{m}}{\pi}\right)^0$.

3) Figur 107 stellt einen Kreis mit dem Radius $r = 1$ dar, der durch den wagerechten und den senkrechten Durchmesser in seine vier Quadranten geteilt ist. Wandert ein Punkt aus der Anfangslage A auf der Kreislinie über B nach C und D nach A, und wiederholt er denselben Weg beliebig oft, so befindet er sich der Reihe nach im ersten, zweiten, dritten, vierten, fünften, sechsten u. s. w. Quadranten. Der fünfte deckt sich dabei mit dem ersten, der sechste mit dem zweiten u. s. w. Läßt man den Radius OA unter Umdrehung um O die Wanderung mitmachen, so bildet er mit der Anfangslage Winkel, die der Reihe nach den genannten Quadranten angehören. Die beschriebene Art der Drehung nennt man die positive, die im entgegengesetzten Sinne erfolgende die negative.

Fig. 107.



Es handelt sich zunächst darum, die goniometrischen Funktionen für alle möglichen Bogen und Winkel zu erklären, nachdem im ersten Teile nur von spitzen und stumpfen Winkeln die Rede gewesen war. Die Radien OA, OB, OC und OD sollen der Reihe nach als der erste, zweite, dritte, vierte Radius bezeichnet werden. Der sich drehende Radius OE heiße der bewegliche Radius. Der letztere ist in Fig. 107 in 4 Lagen OE, OE_1, OE_2 und OE_3 gezeichnet, die symmetrisch gegen den senkrechten bezw. wagerechten Durchmesser liegen. Wird der Winkel AOE mit α^0 bezeichnet, so ist der stumpfe Winkel AOE oder $\alpha_1{}^0 = 180^0 - \alpha^0$, der überstumpfe Winkel AOE_2 oder $\alpha_2{}^0 = 180^0 + \alpha^0$, der gleichfalls überstumpfe Winkel $AOE_3 = \alpha_3{}^0 = 360^0 - \alpha^0$. Bezeichnet man dagegen den zum Winkel gehörigen

Digitized by Google

Bogen mit α, so ist $\widehat{AE} = \alpha$, $\widehat{AE_1} = \pi - \alpha$, $\widehat{AE_2} = \pi + \alpha$, $\widehat{AE_3} = 2\pi - \alpha$. Diese letzteren Bezeichnungen sollen in der Regel Anwendung finden.

Für sämtliche Quadranten sollen nun folgende Erklärungen gelten, bei denen z. B. die Sinuslinie kurz als Sinus, die Cosinuslinie kurz als Cosinus u. s. w. bezeichnet werden darf:

Der Cosinus eines Winkels (oder Bogens) ist die Projektion des beweglichen Radius auf den ersten Radius oder seine Verlängerung. Die Länge der projizierenden Geraden (oder auch die Projektion des beweglichen Radius auf den zweiten Radius) wird als Sinus des Winkels bezeichnet. Die Tangente eines Winkels ist die Kreistangente im Endpunkte des ersten Radius, von diesem aus bis zum Schnittpunkte mit dem beweglichen Radius gemessen. Die Cotangente eines Winkels ist die Kreistangente im Endpunkte des zweiten Radius, von dort aus bis zum Schnittpunkte mit dem beweglichen Radius gemessen.

4) Demnach ist $\cos\alpha = OF$, $\cos\alpha_1 = \cos(\pi - \alpha) = OF_1$, $\cos\alpha_2 = \cos(\pi + \alpha) = OF_1$, $\cos\alpha_3 = \cos(2\pi - \alpha) = OF$. Ebenso kann man schreiben $\cos(-\alpha) = OF$.

Bezeichnet man ferner die Richtung OA als positiv, die Richtung OC also als negativ, so gelten für den Cosinus in den aufeinanderfolgenden Quadranten der Reihe nach die Vorzeichen $+, -, -, +$.

Aus der Kongruenz der Dreiecke ergeben sich ferner die Formeln

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha, \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha,$$
$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

Man kann also kurz schreiben

$$\cos(\pm\alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(\pi \pm \alpha) = -\cos\alpha.$$

Selbstverständlich ist auch

$$\cos(2n\pi \pm \alpha) = \cos\alpha \quad \text{und} \quad \cos((2n+1)\pi \pm \alpha) = -\cos\alpha,$$

denn die Hinzufügung oder Wegnahme eines ganzen Vielfachen von 2π zum Bogen ändert an der Rechnung nichts.

5) Ebenso ist $\sin\alpha = FE$, $\sin\alpha_1 = \sin(\pi - \alpha) = F_1E_1$, $\sin\alpha_2 = \sin(\pi + \alpha) = F_1E_2$, $\sin\alpha_3 = \sin(2\pi - \alpha) = \sin(-\alpha) = FE_3$.

Digitized by Google

Bezeichnet man nun die nach oben gehenden Senkrechten FE und F_1E_1 als positiv, also die nach unten gehenden F_1E_2 und FE_3 als negativ, so hat man für den Sinus in den einzelnen Quadranten die Vorzeichen $+, +, -, -$.

Demnach ist

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, \quad \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha,$$
$$\sin(2\pi - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$$

Man kann schreiben

$$\sin(\pm\alpha) = \pm\sin\alpha, \quad \sin(\pi \mp \alpha) = \pm\sin\alpha,$$

wobei die oberen und ebenso die unteren Vorzeichen zusammengehören. Der Winkel kann hier ebenfalls um $2n\pi$ vergrößert oder verkleinert werden, ohne daß sich etwas ändert.

6) Für die Tangente ist der Reihe nach

$$\tan\alpha = AG, \ \tan\alpha_1 = \tan(\pi-\alpha) = AG_1, \ \tan\alpha_2 = \tan(\pi+\alpha) = AG,$$
$$\tan\alpha_3 = \tan(2\pi - \alpha) = \tan(-\alpha) = AG_1.$$

Die Vorzeichenreihe ist also $+, -, +, -$.

Es ist also

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha, \quad \tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha,$$
$$\tan(2\pi - \alpha) = \tan(-\alpha) = -\tan\alpha.$$

Für die Cotangente ist

$$\cot\alpha = BH, \ \cot\alpha_1 = \cot(\pi-\alpha) = BH_1, \ \cot\alpha_2 = \cot(\pi+\alpha) = BH,$$
$$\cot(2\pi - \alpha) = \cot(-\alpha) = BH_1.$$

Auch hier ist die Vorzeichenreihe $+, -, +, -$.

Ferner ist

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha, \quad \cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha,$$
$$\cot(2\pi - \alpha) = \cot(-\alpha) = -\cot\alpha.$$

8) Demnach gilt allgemein Folgendes:

Die gleichnamigen goniometrischen Funktionen der Winkel (bezw. Bogen) α, $\pi - \alpha$, $\pi + \alpha$ und $2\pi - \alpha$, deren jeder noch um $2n\pi$ vergrößert oder verkleinert werden kann, stimmen dem absoluten Werte nach überein, ihre Vorzeichen aber bestimmen sich aus der nachstehenden Quadrantentabelle:

Digitized by Google

Quadrant:	I,	II,	III,	IV
Sinus:	+	+	—	—
Cosinus:	+	—	—	+
Tangente:	+	—	+	—
Cotangente:	+	—	+	—

9) Sämtliche in Teil I für spitze Winkel bewiesene Formeln gelten, wie sich leicht zeigen läßt, für ganz beliebige Winkel. So ist z. B., wenn α ein spitzer Winkel ist, $\sin^2(\pi \pm \alpha) + \cos^2(\pi \pm \alpha) = \sin^2\alpha + (-\cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, so daß die Formel $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ auch für stumpfe und überstumpfe Winkel gilt. Geometrisch folgt dies sofort aus Fig. 107, wo z. B. $OF_1^2 + F_1E_2^2 = (-OF)^2 + (-FE)^2 = OF^2 + FE^2 = OE^2 = 1$ ist.

Ferner ist z. B.

$$\frac{\sin(\pi+\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha = \tan(\pi+\alpha).$$

Die Formel $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$ gilt also auch für überstumpfe Winkel. Für die einzelnen Quadranten lassen sich daher die Vorzeichen der Tangente und Cotangente aus denen für Sinus und Cosinus ohne weiteres durch Division ableiten. Ebenso leicht ist zu beweisen, daß auch nach der neuen Definition die Funktionen eines Winkels gleich den Cofunktionen des Complementwinkels sind.

In der Formel $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$ ist das Vorzeichen zunächst zweifelhaft. Es ist positiv und negativ zu nehmen, je nachdem der Winkel α dem ersten und vierten, oder dem zweiten und dritten Quadranten angehört.

[10) Will man auch die entbehrlicheren Funktionen Sekante oder Cosekante einführen, die sich durch die Gleichungen $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ und $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$ erklären lassen, so ergeben sich daraus die Vorzeichen +, —, —, + und +, +, —, —, die mit denen für Cosinus und Sinus übereinstimmen. In Fig. 107 ist ferner $\sec\alpha = \frac{1}{OF} = \frac{OE}{OF} = \frac{OG}{OA} = \frac{OG}{1} = OG$ und $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{FE} = \frac{OE}{FE} = \frac{OH}{OB} = \frac{OH}{1} = OH$. Die Sekante ist also das Stück des beweglichen Radius vom Mittelpunkte bis zum Schnitt mit der Tangente, die Cosekante das Stück desselben vom Mittelpunkte bis zum Schnitt mit der Cotangente. In der Figur ist ferner nach dieser Erklärung $\sec(\pi-\alpha) = OG_1$, was als Rückwärtsverlängerung des beweglichen

Digitized by Google

Radius und daher als negativ aufzufassen ist; ebenso $\sec(\pi + \alpha) = OG$ aus demselben Grunde als negativ aufzufassen, $\sec(2\pi - \alpha) = \sec(\pi - \alpha) = OG_1$, was als positiv zu gelten hat, weil es in der Richtung mit dem beweglichen Radius übereinstimmt.

In entsprechender Weise ist $\operatorname{cosec}(\pi - \alpha) = OH_1$, also positiv, $\operatorname{cosec}(\pi + \alpha) = OH_1$, also negativ, $\operatorname{cosec}(2\pi - \alpha) = OH_1$, also negativ. Die weitere Behandlung dieser Funktionen kann jedoch als überflüssig unterlassen werden.]

11) Wächst der Bogen von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, so wächst der Sinus von 0 bis 1, die Tangente von 0 bis ∞, dagegen nimmt der Cosinus ab von 1 bis 0, die Cotangente von ∞ bis 0. (Vgl. Fig. 107.)

Wächst der Bogen von $\frac{\pi}{2}$ bis π, so nimmt der Sinus ab von 1 bis 0, der Cosinus von 0 bis -1, dagegen wächst die Tangente von $-\infty$ bis 0, und die Cotangente nimmt ab von 0 bis $-\infty$.

Wächst der Bogen von π bis $\frac{3}{2}\pi$, so nimmt der Sinus ab von 0 bis -1, der Cosinus wächst von -1 bis 0, die Tangente wächst von 0 bis $+\infty$, die Cotangente nimmt ab von $+\infty$ bis 0.

Wächst der Bogen von $\frac{3}{2}\pi$ bis 2π, so wächst der Sinus von -1 bis 0, der Cosinus von 0 bis 1, die Tangente von $-\infty$ bis 0, die Cotangente aber nimmt ab von 0 bis $-\infty$.

Der Wert der Tangente macht einen Sprung von $+\infty$ nach $-\infty$, sobald der bewegliche Radius die Lage $\frac{\pi}{2}$ oder $\frac{3}{2}\pi$ passiert. Für die Cotangente erfolgt der Sprung von $-\infty$ nach $+\infty$ bei dem Passieren der Lagen π und 2π bezw. 0. Für die kritischen Stellen selbst bleibt der Wert zweifelhaft. Dies stimmt überein mit der Unbestimmtheit des Vorzeichens bei dem Bruche $\frac{1}{0}$, der $+\infty$ und $-\infty$ bedeuten kann, da man 0 als ± 0 auffassen darf*).

[Da der Kreis bei A senkrecht auf dem ersten Radius steht, fällt der Sinus dort so nahe mit dem zugehörigen Bogen zusammen, daß man sagen darf, für sehr kleines α sei $\sin\alpha = \alpha$. Ebenso ist für sehr kleines α zu setzen $\tan\alpha = \alpha$.]

12) Zur Ergänzung der früher abgeleiteten Formeln sollen noch folgende Aufgaben für die Funktionen eines Winkels bezw. Bogens gelöst werden.

*) Die Schreibweise $\frac{1}{0} = \pm\infty$ ist nur als eine auf Übereinkunft beruhende zu betrachten, da wohl durch Unendlichkleines, nicht aber durch Null, wirklich dividiert werden kann.

Digitized by Google

a) Den Sinus eines Winkels durch die Tangente auszudrücken.

Auflösung. Es ist $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$, also durch Quadrierung $\tan^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$, oder $\tan^2\alpha - \tan^2\alpha\sin^2\alpha = \sin^2\alpha$, $\sin^2\alpha(1+\tan^2\alpha) = \tan^2\alpha$, folglich $\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$.

b) Den Cosinus durch die Tangente auszudrücken.

Auflösung. $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$, folglich $\tan^2\alpha = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$, $\cos^2\alpha(1+\tan^2\alpha) = 1$, folglich $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$.

c) Leite ebenso ab: $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$, $\cos\alpha = \frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$.

[Andere Ableitungen der Formeln a) und b) ergeben sich so:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1+\tan^2\alpha,$$

folglich

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}.$$

$$\sin\alpha = \cos\alpha\cdot\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\cdot\tan\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}.]$$

II. Die Funktionen von Winkelsummen und die Summen von Funktionen.

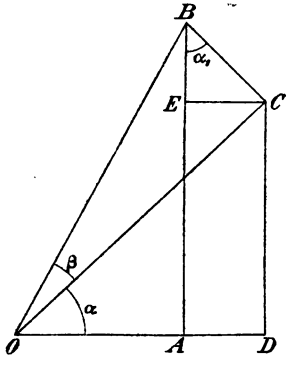
13) **Aufgabe.** Den Sinus des Winkels $(\alpha+\beta)$ durch die Funktionen der Einzelwinkel α und β auszudrücken.

Auflösung. In Fig. 108 sei $\sphericalangle AOB = \alpha+\beta$, $BA \perp OA$, $BC \perp OC$, $CD \perp OD$, $EC \perp AB$. Dabei ist $\sphericalangle EBC = \alpha_1 = \alpha$. (Warum?) Ferner ist

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{AB}{OB} = \frac{AE+EB}{OB}$$

$$= \frac{DC}{OB} + \frac{EB}{OB}.$$

Fig. 108.



Zu CD gehört die Hypotenuse OC, zu EB

die Hypotenuse BC. Multipliziert man den Zähler und Nenner des ersten dieser Brüche mit OC, die des zweiten mit BC, so erhält man

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{DC\cdot OC}{OC\cdot OB} + \frac{BE\cdot BC}{BC\cdot OB} = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Es ist also

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

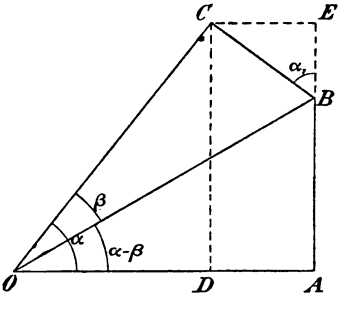
Bemerkung. An der Figur sind nur geringfügige Änderungen nötig, wenn $(\alpha+\beta)$ ein stumpfer Winkel, oder wenn α oder β, oder beide Winkel stumpfe sind. Die Formel hat überhaupt allgemeine Geltung.

14) Der Winkel β kann auch abgezogen werden. Dann handelt es sich, wenn man die Formel vorläufig weiter gelten läßt, um

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Für diesen Fall ist die entsprechende Zeichnung in Fig. 109 dargestellt, wo Winkel $AOB = (\alpha-\beta)$, alles andere wie vorher ist. Es wird

Fig. 109.



$$\sin(\alpha-\beta) = \frac{AB}{OB} = \frac{AE-BE}{OB} = \frac{DC}{OB} - \frac{BE}{OB}.$$

Erweitert man die Brüche wieder mit den zu DC und BE gehörigen Hypotenusen, so folgt

$$\sin(\alpha-\beta) = \frac{DC\cdot OC}{OC\cdot OB} - \frac{BE\cdot BC}{BC\cdot OB} = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

womit das Weitergelten der ersten Formel bewiesen ist. Beide Formeln vereinigen sich zu folgender:

1) $$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$

in der die oberen und ebenso die unteren Vorzeichen zusammengehören.

Ohne Geometrie ergeben sich die Erweiterungen der Gültigkeit für Winkel der übrigen Quadranten auf folgendem Wege. Sind z. B. α und β spitz, so ist für die Summe der Winkel $(\pi-\alpha)$ und β, von denen der erstere stumpf ist,

$$\sin[(\pi-\alpha)+\beta] = \sin[\pi-(\alpha-\beta)] = \sin(\alpha-\beta)$$
$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \sin(\pi-\alpha)\cos\beta + \cos(\pi-\alpha)\sin\beta.$$

Digitized by Google

Ebenso ist für zwei stumpfe Winkel $(\pi - \alpha)$ und $(\pi - \beta)$

$$\sin[(\pi - \alpha) + (\pi - \beta)] = \sin[2\pi - (\alpha + \beta)]$$
$$= -\sin(\alpha + \beta) = -[\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta]$$
$$= +\sin(\pi - \alpha)\cos(\pi - \beta) + \cos(\pi - \alpha)\sin(\pi - \beta).$$

Dies genügt zum Beweise des Weitergeltens der Formel 1).

15) **Aufgabe.** Den Cosinus des Winkels $(\alpha + \beta)$ durch die Funktionen der Einzelwinkel darzustellen.

Auflösung. In Figur 108 ist $\cos(\alpha + \beta) = \frac{OA}{OB} = \frac{OD - AD}{OB}$
$= \frac{OD}{OB} - \frac{EC}{OB} = \frac{OD}{OC} \cdot \frac{OC}{OB} - \frac{EC}{BC} \cdot \frac{BC}{OB} = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$
Demnach ist

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Ebenso ergiebt sich aus der Figur 109 die Formel

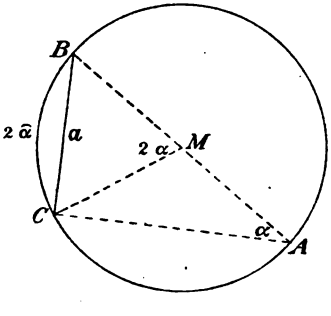
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$

die aus der vorigen auch folgt, wenn man $-\beta$ statt β einsetzt. Beide lassen sich zusammenfassen in

2) $$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,$$

wo die oberen und ebenso die unteren Vorzeichen zusammengehören. Auch diese Formel gilt ganz allgemein.

Fig. 110.



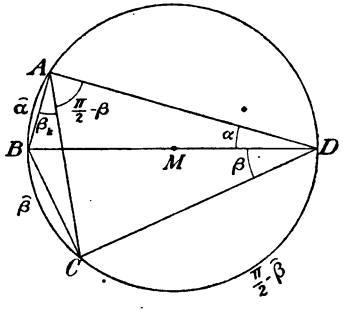
[16) Die Formeln für die Funktionen von $(\alpha + \beta)$ lassen sich auch mit Hülfe des Ptolemäischen Satzes (vergl. Seite 1) ableiten. Dazu ist folgende Vorbemerkung nötig. In Fig. 110 ist ein Kreis mit Radius 1, eine Sehne $BC = a$ und der zugehörige Peripheriewinkel α^0 mit dem Durchmesser AB als Schenkel dargestellt. Dabei ist $\sin\alpha^0 = \frac{BC}{BA} = \frac{BC}{2}$, also Sehne $\overline{BC} = 2\sin\alpha^0$. Zum Peripheriewinkel α^0 gehört aber der Centriewinkel $2\alpha^0$ und zu diesem der Bogen $\overset{\frown}{BC}$, der mit $2\,\overset{\frown}{\alpha}$ bezeichnet werden soll. Es ist also Sehne $\overline{BC} = 2\sin\frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$, sobald der Kreisradius gleich 1 gesetzt wird. Dies

Digitized by Google

gilt zugleich auch von dem größeren der beiden Kreisbogen, die zur Sehne BC gehören, d. h. von $2\pi - 2\widehat{\alpha} = 2(\pi - \widehat{\alpha})$, denn es ist $\sin\frac{2(\pi-\widehat{\alpha})}{2} = \sin\widehat{\alpha} = \sin\frac{\widehat{BC}}{2}$. Auch kann man jeden der beiden Bogen um 2π oder ein beliebiges Vielfaches von 2π vergrößern.

Macht man dagegen den Radius des Kreises $= \frac{1}{2}$, so gehört zum Peripheriewinkel α^0 der Bogen $\widehat{BC} = r \cdot 2\widehat{\alpha} = \frac{1}{2} \cdot 2\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha}$, und es ist $\sin\alpha^0 = \frac{BC}{1} = \overline{BC}$. Folglich: Im Kreise mit dem Durchmesser 1 ist Sehne $\overline{BC} = \sin\widehat{BC} =$ dem Sinus des zugehörigen Peripheriewinkels.

Fig. 111.



Hiervon wird Anwendung auf Fig. 111 gemacht. Im Kreise M mit Durchmesser $BD = 1$ (und Radius $r = \frac{1}{2}$) sind an den Durchmesser die Winkel $BDA = \alpha$ und $BDC = \beta$ nach verschiedenen Seiten angelegt, so daß $\widehat{BA} = \widehat{\alpha}$ und $BC = \widehat{\beta}$ die zugehörigen Kreisbogen sind. Dabei ist $\sphericalangle CAD = \frac{\pi}{2} - \beta$, ebenso Bogen $\widehat{CD} = \frac{\pi}{2} - \widehat{\beta}$. (Warum?)

Nach Ptolemäus ist nun

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC,$$

also nach der vorigen Entwickelung

$$\sin(\alpha + \beta) \cdot 1$$
$$= \sin\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \sin\left(\alpha + \beta + \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right)\sin\beta$$

oder

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\sin\beta,$$

folglich

a) $$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Legt man die Winkel α und β auf derselben Seite des Durchmessers an und ist $\alpha > \beta$, so findet man ebenso

b) $$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Digitized by Google

Setzt man in b) statt α den Bogen $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ein, so erhält man

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta,$$

oder

c) $$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Setzt man dagegen in Formel b) $\frac{\pi}{2} + \alpha$ an Stelle von α, so entsteht

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Die Ableitung für α und β gilt allerdings zunächst nur für den Fall, daß α und β spitze Winkel sind. Durch die in 14) angewandten Substitutionen läßt sich aber auch hier die Allgemeingültigkeit für beliebig große Winkel nachweisen.]

17) Die Hauptformeln für die Addition der Funktionen. Nach Obigem gelten die Formeln

$$\sin(x + y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y,$$
$$\sin(x - y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y,$$

also durch beiderseitige Addition bezw. Subtraktion:

$$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2\sin x\cos y,$$
$$\sin(x + y) - \sin(x - y) = 2\cos x\sin y.$$

Setzt man willkürlich $x + y = \alpha$ und $x - y = \beta$, so muß man, wie sich durch Addition und Subtraktion ergiebt, $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$ und $y = \frac{\alpha - \beta}{2}$ setzen. So entstehen die Formeln

3) $$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2},$$

4) $$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Ganz ebenso folgen aus den Formeln für $\cos(x + y)$ und $\cos(x - y)$ die folgenden:

5) $$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2},$$

6) $$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Die Formeln 3) bis 6) erleichtern die Berechnungen mit Hülfe der Logarithmen. Inwiefern?

Digitized by Google

III. Goniometrische Übungen.

18) Im Folgenden werden Formeln abgeleitet, von denen nur die wichtigen numeriert sind, die übrigen sind bloßes Übungsmaterial. An ihnen soll gezeigt werden, daß sich scheinbar complicierte Ausdrücke bisweilen durch naheliegende Umformungen vereinfachen und namentlich für den logarithmischen Rechnungsansatz geeigneter machen lassen. Zunächst werden Formeln über die Winkel 2α und $\frac{\alpha}{2}$ abgeleitet.

Setzt man in der Formel für $\sin(\alpha + \beta)$ den Winkel α statt β ein, so entsteht

$$\sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha,$$

folglich ist

7) $$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Macht man dasselbe mit der Formel für $\cos(\alpha + \beta)$, so erhält man

8) $$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \quad \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Man kann auch schreiben (mit Hülfe von $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$)

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1,$$

und daraus folgt:

9) $$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}, \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}},$$

10) $$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}.$$

Durch Division entsteht hieraus

$$\tan\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}}, \quad \tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}.$$

Es ist

$$\left(\cos\frac{\alpha}{2} \pm \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) \pm 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 1 \pm \sin\alpha,$$

folglich

$$\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 + \sin\alpha},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \sin\alpha},$$

Digitized by Google

also durch Addition bezw. Subtraktion

$$2\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha},$$

$$2\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha},$$

und durch Division

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}}{\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}}.$$

Aus $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$ folgt, wenn man die rechte Seite durch 1 oder $\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}$ dividiert, wodurch nichts geändert wird:

$$\cos\alpha = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}},$$

und wenn man jedes Glied des Zählers und Nenners durch $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ dividiert:

$$\cos\alpha = \frac{1 - \tan^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Auf demselben Wege ergiebt sich aus $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ die Formel

$$\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2\frac{\alpha}{2}}.$$

19) Formeln für den Sinus bezw. Cosinus von $3\alpha, 4\alpha, 5\alpha$.

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha$$
$$= 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha.$$

Setzt man hier $1 - \sin^2\alpha$ statt $\cos^2\alpha$, so folgt

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

Ferner ist $\sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha = 2\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$, was sich noch auf $\sin\alpha$ allein reducieren läßt.

Bilde ferner

$$\sin 5\alpha = 5\cos\alpha - 20\cos^3\alpha + 16\cos^5\alpha,$$
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$
$$\cos 4\alpha = \cos^4\alpha - 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha,$$

Digitized by Google

was noch auf lauter Cosinus reduciert werden kann,

$$\cos 5\alpha = 5\cos\alpha - 20\cos^3\alpha + 16\cos^5\alpha.$$

20) Einige Tangentenformeln.

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta}.$$

Dividiert man den Zähler und Nenner der rechten Seite durch $\cos\alpha\cos\beta$, so entsteht

11) $$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}.$$

Setzt man $\beta = \alpha$, so geben die oberen Vorzeichen

12) $$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}.$$

Da $\tan 45^0 = 1$ ist, so folgt aus 11)

$$\tan(45^0 \pm \alpha) = \frac{1 \pm \tan\alpha}{1 \mp \tan\alpha}.$$

In ganz entsprechender Weise können auch Formeln für die Cotangente entwickelt werden.

21) Nach 3) ist

$$1 + \sin\alpha = \sin 90^0 + \sin\alpha = 2\sin\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= 2\sin^2\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Ebenso ist

$$1 - \sin\alpha = 2\cos\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= 2\cos^2\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Durch Division und Wurzelausziehung folgt

$$\tan\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}},$$

wozu die Schlußformel von Abschnitt 20) verglichen werden kann.

Von geringerer Bedeutung sind die Formeln

$$\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha} \pm \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$

$$\cot\alpha \pm \cot\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Digitized by Google

Dagegen findet man Formeln von hervorragender Wichtigkeit im arithmetischen Teile (Abschnitt VI), wo sie mit Hülfe des binomischen Lehrsatzes entwickelt sind.

[22) Berechnung der Funktionen einiger besonderer Winkel.

In Teil I Seite 175 wurden die Werte einiger Winkelfunktionen auf geometrischem Wege berechnet. Goniometrisch erreicht man dasselbe folgendermaßen:

Aus $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ folgt z. B.

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{2}}{2}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Ebenso ist $\sin\frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Aus $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ folgt z. B.

$$\cos 90^0 = 4\cos^3 30^0 - 3\cos 30^0$$

oder, da die linke Seite gleich Null ist, nach Division durch $\cos 30^0$,

$$4\cos^2 30^0 = 3, \quad \text{also} \quad \cos 30^0 = \sqrt{\tfrac{3}{4}} = \sin 60^0.$$

Folglich

$$\sin 30^0 = \sqrt{1-\tfrac{3}{4}} = \sqrt{\tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2} = \cos 60^0.$$

Aus der Formel für $\cos 5\alpha$ folgt für $\alpha = \frac{\pi}{10} = 18^0$, also für $5\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\cos 5\alpha = 0$, $0 = 5\cos\frac{\pi}{10} - 20\cos^3\frac{\pi}{10} + 16\cos^5\frac{\pi}{10}$, also nach Division durch $\cos\frac{\pi}{10}$

$$\cos^4\frac{\pi}{10} - \tfrac{5}{4}\cos^2\frac{\pi}{10} = -\tfrac{5}{16}.$$

Daraus würden sich für $\cos^2\frac{\pi}{10}$ die beiden Lösungen $\frac{5\pm\sqrt{5}}{8}$ ergeben. Nun kann aber nur einer dieser Werte richtig sein. Bedenkt man z. B. daß $\cos^2 18^0 > \cos^2 30^0$, d. h. $> \frac{3}{4}$ oder $\frac{6}{8}$ sein muß, so erkennt man, daß das negative Zeichen zu verwerfen ist. Demnach ist

$$\cos 18^0 = \sqrt{\tfrac{5+\sqrt{5}}{8}} = \sin 72^0.$$

Digitized by Google

Das andere Wurzelzeichen kommt in Folgendem zum Vorschein. Die Formel für $\sin 5\alpha$ geht für $\alpha = \frac{\pi}{5}$ d. h. $5\alpha = \pi$ über in

$$0 = 5 \sin\frac{\pi}{5} - 20 \sin^3\frac{\pi}{5} + 16 \sin^5\frac{\pi}{5},$$

oder nach Division durch $\sin\frac{\pi}{5}$ in

$$\sin^4\frac{\pi}{5} - \frac{5}{4} \sin^2\frac{\pi}{5} = -\frac{5}{16}.$$

Auch hieraus würde für $\sin^2\frac{\pi}{5}$ folgen $\frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$. Da aber $\sin^2 36^0 < \sin^2 45^0$, d. h. $< \frac{1}{2}$ sein muß, so ist $\frac{5+\sqrt{5}}{8}$ zu groß, und es folgt

$$\sin 36^0 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} = \cos 54^0.$$

Aus $\cos\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\alpha - 1$ folgt für $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{5}$:

$$\cos\frac{\pi}{5} = 2\cos^2\frac{\pi}{10} - 1 = 2\frac{5+\sqrt{5}}{8} - 1 = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \cos 36^0 = \sin 54^0.$$

Aus $\cos\frac{2\pi}{5} = 2\cos^2\frac{\pi}{5} - 1 = 2\left[\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right]^2 - 1$ folgt $\cos 72^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \sin 18^0$.

Mit Hülfe der obigen Formeln lassen sich noch viele andere berechnen, z. B. $\sin 15^0 = \sin\frac{30^0}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $\cos 15^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $\tan 15^0 = 2 - \sqrt{3}$, $\cot 15^0 = 2 + \sqrt{3}$. Daraus folgt z. B. $\sin 7\frac{1}{2}^0 = \sin\frac{15^0}{2} = \frac{1}{4}\left[\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{6-3\sqrt{2}}\right]$. Ferner ist $\sin 22\frac{1}{2}^0 = \sin\frac{45^0}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\cos 22\frac{1}{2}^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\tan 22\frac{1}{2}^0 = \sqrt{2} - 1$, $\cot 22\frac{1}{2}^0 = \sqrt{2} + 1$ u. s. w.]

[23) Handelt es sich um die Winkel eines Dreiecks, α, β und γ, so ist vor allem zu beachten, daß $\alpha + \beta = 180^0 - \gamma$ und $\frac{\alpha+\beta}{2} = 90^0 - \frac{\gamma}{2}$ ist. Daraus folgt

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma, \quad \cos(\alpha+\beta) = -\cos\gamma, \quad \tan(\alpha+\beta) = -\tan\gamma,$$
$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\frac{\gamma}{2}, \quad \cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}, \quad \tan\frac{\alpha+\beta}{2} = \cot\frac{\gamma}{2}.$$

So folgt z. B. aus

Digitized by Google

$$\tan(\alpha+\beta) = -\tan\gamma$$

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = -\tan\gamma$$

oder

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma.$$

Aus $\alpha+\beta+\gamma = 180^0$ folgt $\left(90^0-\frac{\alpha}{2}\right)+\left(90^0-\frac{\beta}{2}\right)+\left(90^0-\frac{\gamma}{2}\right)$ $= 270^0-\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = 180^0$. Folglich gilt auch für diese neuen Dreieckswinkel die Formel

$$\tan\left(90^0-\frac{\alpha}{2}\right)+\tan\left(90^0-\frac{\beta}{2}\right)+\tan\left(90^0-\frac{\gamma}{2}\right)$$
$$= \tan\left(90^0-\frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(90^0-\frac{\beta}{2}\right)\tan\left(90^0-\frac{\gamma}{2}\right),$$

also ist für Dreieckswinkel überhaupt

$$\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2} = \cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2}.$$

Aus

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma = \sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)$$
$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left[\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right]$$
$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left[2\cos\frac{\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}}{2}\sin\frac{\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}}{2}\right]$$
$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\,2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}.$$

folgt

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Ähnliche Formeln lassen sich noch in größerer Zahl ableiten. Versuche z. B. folgende zu beweisen:

$$\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma = 1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}-1,$$

Digitized by Google

$$\cos\alpha + \cos\beta + \sin\gamma = 4\sin\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2},$$

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma} = \cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}.$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2} = 1,$$

$$\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2} - \cot\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} - \cot\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} = 1,$$

$$\cot\frac{\alpha}{2} - \tan\frac{\beta}{2} - \tan\frac{\gamma}{2} = \cot\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}.$$

[24) Goniometrische Gleichungen. (Vergl. Seite 151.)

Eine besondere Art von transcendenten Gleichungen erhält man, wenn die Unbekannte als Bogen oder Winkel von goniometrischen Funktionen vorkommt. Nur einige Beispiele seien angegeben.

Aufgabe. Für welche Winkel bezw. Bogen ist

$$a\sin x = b\cos x?$$

Auflösung. $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{b}{a}$, $\tan x = \frac{b}{a}$, also $x = \arctan\frac{b}{a}$, d. h. x ist der Bogen, dessen Tangente $\frac{b}{a}$ ist. Der Bogen bezw. Winkel ist mit Hülfe der trigonometrischen Tafeln zu bestimmen.

Aufgabe. Für welche Winkel bezw. Bogen ist

$$\sin x + \cos x = a?$$

Auflösung. $\sin x + \sqrt{1 - \sin^2 x} = a$,

$$\sqrt{1 - \sin^2 x} = a - \sin x, \quad 1 - \sin^2 x = a^2 - 2a\sin x + \sin^2 x,$$

$$\sin^2 x - a\sin x = \frac{1 - a^2}{2}, \quad \sin x = \frac{a \pm \sqrt{2 - a^2}}{2},$$

$$x = \arcsin\frac{a \pm \sqrt{2 - a^2}}{2}.$$

(Wie groß darf der absolute Betrag von a höchstens sein?)

Aufgabe. Für welchen Winkel bezw. Bogen ist

$$a\sin 2x = b\sin x?$$

Auflösung. $2a\sin x\cos x = b\sin x$, $\cos x = \frac{b}{2a}$, $x = \arccos\frac{b}{2a}$.

Aufgabe. Für welchen Winkel ist $a\sin x = b\cot x$?

Auflösung. $x = \arccos\frac{-b \pm \sqrt{4a^2 + b^2}}{2a}$.]

Digitized by Google

IV. Sätze über die Seiten und Winkel des Dreiecks.

23) Der Tangentensatz.

Für die Dreieckswinkel gilt der Sinussatz $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c$. Aus der Proportion

$$\sin\alpha : \sin\beta = a : b$$

folgt nach Teil I, Geom. Nr. 152

$$(\sin\alpha + \sin\beta) : (\sin\alpha - \sin\beta) = (a + b) : (a - b).$$

Schreibt man dies in Bruchform, so ergiebt sich durch Umformung der Klammern

$$\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{a+b}{a-b}$$

oder

$$1) \qquad \frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{a+b}{a-b}.$$

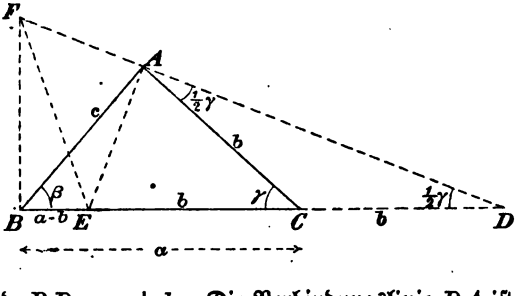
Dieser Satz heißt der Tangentensatz. Mit seiner Hülfe kann man ein Dreieck aus a, b und γ berechnen, da dann $\frac{\alpha+\beta}{2} = 90^0 - \frac{\gamma}{2}$ ist. Man berechnet

$$\tan\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b}\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$$

und findet durch Addition und Subtraktion aus $\frac{\alpha+\beta}{2}$ und $\frac{\alpha-\beta}{2}$ die Werte für α und β.

(Eine leichte Probe ergiebt sich daraus, daß $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ sein muß.)

Fig. 112.



[Geometrische Ableitung des Tangentensatzes: Am Dreieck ABC in Fig. 112 sei $CE = b$ und die Verlängerung $CD = b$, also $BE = a - b$ und $BD = a + b$. Die Verbindungslinie DA ist bis zum Schnitte mit dem Lote BF verlängert. Dabei ist $\sphericalangle CDA$

Digitized by Google

$= \frac{\gamma}{2} = \left(90^0 - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, also $\tan\frac{\alpha+\beta}{2} = \cot\frac{\gamma}{2} = \frac{BD}{BF}$ oder 1) $\tan\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{a+b}{BF}$. Ferner ist $\sphericalangle EAD = 90^0$ als Peripheriewinkel des Kreises, der, mit Radius b um C geschlagen, durch D, A und E geht. Also ist $\sphericalangle EAC = 90^0 - \frac{\gamma}{2}$ und $\sphericalangle BAE = \alpha - \left(90^0 - \frac{\gamma}{2}\right) = \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) - 90^0 = \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\alpha-\beta}{2}$. Nun ist aber $BEAF$ ein Sehnenviereck, denn die bei B und A liegenden Winkel desselben sind rechte. Folglich sind die Peripheriewinkel BFE und BAE einander gleich, und es ist auch $\sphericalangle BFE = \frac{\alpha-\beta}{2}$. Nun ist $\tan\sphericalangle BFE = \frac{BE}{BF}$, also 2) $\tan\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{BF}$. Durch Division erhält man aus den Gleichungen 1) und 2), da BF sich hebt.

$$\frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{a+b}{a-b}.$$

Diese Entwickelung ist von den goniometrischen Summenformeln unabhängig und kann auch vor denselben durchgenommen werden.]

24) Folgerungen des Cosinussatzes.

Nach dem Cosinussatze ist

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2+c^2}{2ab},$$

folglich, wenn man auf beiden Seiten 1 addiert,

$$1 + \cos\gamma = 1 + \frac{a^2+b^2+c^2}{2ab} = \frac{(a+b)^2 - c^2}{2ab},$$

oder, wenn man im Zähler die Differenz der Quadrate in ein Produkt zerlegt,

$$1 + \cos\gamma = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab}.$$

Nun ist aber

$$1 + \cos\gamma = 2\cos^2\frac{\gamma}{2},$$

folglich ist

$$2\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab},$$

und

Digitized by Google

2) $\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{4ab}} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} = \sqrt{\frac{p \cdot p_3}{ab}}$,

wo in früherer Bezeichnungsweise (vgl. Teil I Nr. 119 und 120) $\frac{a+b+c}{2} = p$, $\frac{a+b-c}{2} = p_3$ gesetzt ist, und eine einfache Deutung der p als Tangenten des In-Kreises möglich ist.

In ähnlicher Weise folgt aus der Anfangsgleichung

$$1 - \cos\gamma = 1 - \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{c^2-(a-b)^2}{2ab} = \frac{(c+a-b)(c-a+b)}{2ab},$$

also, da $1 - \cos\gamma = \sin^2\frac{\gamma}{2}$ ist,

3) $\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+a)}{4ab}} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} = \sqrt{\frac{p_1 p_2}{ab}}$.

Aus 2) und 3) folgt durch Multiplikation und Zusetzung des Faktors 2, da $2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \sin\gamma$ ist,

4) $$\sin\gamma = \frac{2}{ab}\sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{16}}$$
$$= \frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2}{ab}\sqrt{pp_1p_2p_3};$$

durch Division dagegen folgt

5) $$\tan\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} = \sqrt{\frac{p_1 p_2}{pp_3}}.$$

Der Inhaltssatz ergiebt, wie in Teil I:

6) $F = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{pp_1p_2p_3}$.

Damit sind die in Teil I auf geometrischem Wege abgeleiteten Formeln im wesentlichen goniometrisch entwickelt. Die Radien der Berührungskreise ϱ, ϱ_1, ϱ_2 und ϱ_3 ergeben sich, wie in Teil I, aus $F = \frac{p\varrho}{2} = \frac{p_1\varrho_1}{2} = \frac{p_2\varrho_2}{2} = \frac{p_3\varrho_3}{2}$ als

$$\varrho = \sqrt{\frac{p_1p_2p_3}{p}}, \quad \varrho_1 = \sqrt{\frac{pp_2p_3}{p_1}}, \quad \varrho_2 = \sqrt{\frac{pp_1p_3}{p_2}}, \quad \varrho_3 = \sqrt{\frac{pp_1p_2}{p_3}};$$

die Tangenten der halben Winkel ergeben sich in Bezug auf ϱ als

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{p_1}, \quad \tan\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{p_2}, \quad \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{p_3};$$

Digitized by Google

es ist aber auch

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho_1}{p}, \quad \tan\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho_2}{p}, \quad \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho_3}{p}.$$

25) Nach dem Sinussatze ist $\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$ und $\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$, also auch

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\gamma}$$

oder, da $\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta)$ ist,

$$(a+b)\sin(\alpha+\beta) = c(\sin\alpha + \sin\beta),$$

also

$$(a+b)\,2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 2c\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right),$$

so daß

7) $$(a+b)\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = c\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Ebenso folgt aus dem Sinussatze

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\gamma}$$

oder

$$(a-b)\,2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 2c\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

folglich

8) $$(a-b)\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = c\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Durch Division kann man aus 7) und 8) den Tangentensatz ableiten. Durch beiderseitige Quadrierung und Addition erhält man ferner

$$(a+b)^2\sin\frac{\gamma}{2} + (a-b)^2\cos^2\frac{\gamma}{2} = c^2.$$

Ist von einem Dreieck a, b und γ gegeben, so erhält man durch Berechnung der Logarithmen der linken Seiten von 7) und 8) zugleich die Logarithmen der rechten Seiten und durch Subtraktion derselben $\lg\left[c\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right] - \lg\left[c\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right] = \lg\tan\frac{\alpha-\beta}{2}$, woraus sich der Winkel $\frac{\alpha-\beta}{2}$ ergiebt. Durch Addition bezw. Subtraktion zu $\frac{\alpha+\beta}{2}$ gelangt man auf α und β, so daß man sämtliche Dreieckswinkel hat, deren Summe wieder auf 180^0 führen muß, wenn man richtig gerechnet hat. (Probe.)

Die Sätze 7) und 8) werden bisweilen als der Gaußsche Doppelsatz bezeichnet.

Digitized by Google

V. Dreiecksberechnungen.

26) Bei den Dreiecksberechnungen kommt es wesentlich darauf an, ob nur nach einem einzigen Stück gefragt ist, oder ob sämtliche noch nicht bekannten Seiten bezw. Winkel und zugleich der Inhalt oder auch die Radien der Hauptkreise berechnet werden sollen.

Sind z. B. a, b und c gegeben und wird nur nach einem Winkel, z. B. γ, gefragt, so benutzt man z. B. die Formeln

$$\cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{4ab}} \text{ oder } \tan\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{(a+b+c)(a+b-c)}},$$

die im allgemeinen bequemer sind, als die aus dem Cosinussatze entspringende Formel $\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. (Letztere ist nur bei kleineren Zahlenwerten vorzuziehen, bei denen Logarithmen nur gegen den Schluß nötig sind.)

Wird dagegen nach allen Winkeln und zugleich nach dem Inhalt gefragt, so berechnet man die Hülfsgröße

$$\varrho=\sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4(a+b+c)}}=\sqrt{\frac{p_1p_2p_3}{p}}$$

und bildet $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\varrho}{p_1}$, $\tan\frac{\beta}{2}=\frac{\varrho}{p_2}$ $\left(\text{zur Probe } \tan\frac{\gamma}{2}=\frac{\varrho}{p_3}\right)$ und endlich $F=p\cdot\varrho$.

Ist a, b und γ gegeben, und wird nur nach F gefragt, so nimmt man die Formel $F=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Wird dagegen nach α und β gefragt, so benutzt man zur Berechnung von $\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ den Tangentensatz, wie es früher erläutert wurde, oder auch den Gaußschen Doppelsatz. Aus $\frac{\alpha+\beta}{2}=90^0-\frac{\gamma}{2}$ und $\frac{\alpha-\beta}{2}$ findet man α und β und mit Hülfe des Sinussatzes c. Den Cosinussatz $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$ wird man nur anwenden, wenn lediglich nach c gefragt wird.

Bei Anwendung von Logarithmen wird man im allgemeinen die Produktformeln vorziehen.

27) Im allgemeinen entspricht jeder Aufgabe aus dem Gebiete der Dreieckskonstruktionen eine Berechnungsaufgabe trigonometrischer Art. Ist die erstere gelöst, so kann man in der Regel daraus den Berechnungsweg für die andere ableiten. Bisweilen kommt man aber auf rein trigonometrischem Wege noch schneller zum Ziele.

Digitized by Google

Bei schwieriger erscheinenden Aufgaben helfen bisweilen Beziehungen, die aus der Geometrie bekannt sind oder sich leicht auf trigonometrischem Wege ableiten lassen. Namentlich zwischen r, ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, F und den Winkeln α, β und γ finden zahlreiche Beziehungen solcher Art statt. Einige mögen im Folgenden entwickelt werden.

28) Soll die Dreiecksfläche aus r, α und β berechnet werden, so handelt es sich um $F = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$, wo $a = 2r\sin\alpha$, $b = 2r\sin\beta$ ist, also um

1) $$F = 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma.$$

Soll außerdem ϱ berechnet werden, so erhält man aus $F = \frac{a+b+c}{2}\varrho$ durch Einsetzung von $a = 2r\sin\alpha$ u. s. w.

$$F = r(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)\varrho,$$

oder, da nach Abschnitt 23) für die Klammer $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ geschrieben werden kann,

2) $$F = 4r\varrho \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Führt man in Formel 1) $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$ ein, z. B. $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, so ergiebt sich aus der Vergleichung von 1) und 2)

3) $$\varrho = 4r \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Durch Division folgt noch aus 2) und 3)

4) $$F = \varrho^2 \cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2},$$

so daß F auch aus ϱ, α und β berechnet werden kann.

Es ist ferner

$$F = \frac{a+b-c}{2}\varrho_3 = r(\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma)\varrho_3,$$

oder, da nach Abschnitt 23) für die Klammer $4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ geschrieben werden kann,

5) $$F = 4r\varrho_3 \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Durch Vergleich mit der auf die halben Winkel reducierten Formel 1) folgt

Digitized by Google

6) $$\varrho_3 = 4r \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2},$$

so daß auch ϱ_3 aus r, α und β, und ebenso ϱ_1 und ϱ_2 berechnet werden können.

Durch Division folgt aus 3) und 6)

7) $$\frac{\varrho}{\varrho_3} = \tan\frac{\alpha}{2} \tan\frac{\beta}{2},$$

wodurch der Zusammenhang zwischen den Radien der sämtlichen Berührungskreise gegeben ist. (Cyklische Vertauschung der Indices und Winkel.)

Durch Vergleich mit 4) folgt noch

9) $$F = \varrho\varrho_3 \cot\frac{\gamma}{2}.$$

Aus den Formeln 3) und 6) und aus Abschnitt 23 folgen die nachstehenden:

9)
$$\begin{cases} 1 + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{\varrho}{r}, \\ 1 - \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{\varrho_1}{r}, \\ 1 + \cos\alpha - \cos\beta + \cos\gamma = \frac{\varrho_2}{r}, \\ 1 + \cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma = \frac{\varrho_3}{r}. \end{cases}$$

Durch Addition der drei letzten erhält man

$$3 + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3}{r},$$

oder nach Abschnitt. 23)

$$4r\left[\sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} + 1\right] = \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3.$$

Aus 3) folgt ebenso

$$4r\left[\sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} + 1\right] = \varrho + 4r,$$

also gilt die geometrische Formel

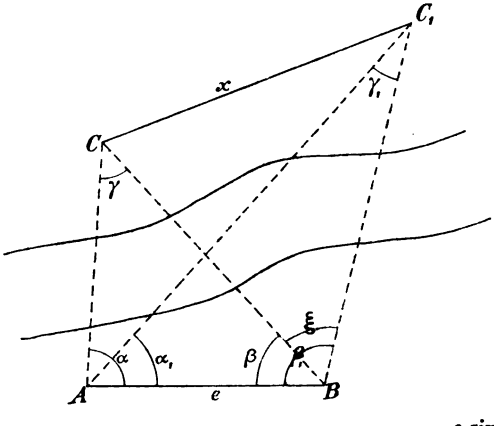
1) $$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho = 4r.$$

(Vergl. Geometrie Nr. 10.)

Es giebt noch eine reiche Fülle ähnlicher Formeln, aus denen sich ganze Gruppen von Berechnungsaufgaben ableiten lassen.

Digitized by Google

Fig. 113.



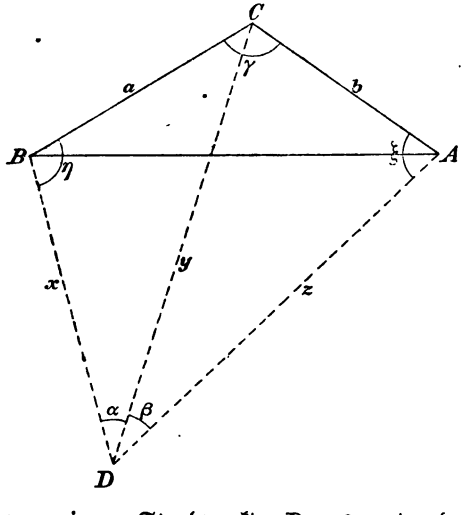
29) **Aufgabe.** Diesseits eines Stromes ist eine Standlinie $AB = e$ gemessen. Um eine Strecke CC_1 jenseits desselben zu bestimmen, mißt man bei A die Winkel α und α_1, bei B die Winkel β und β_1. Wie ist $CC_1 = x$ zu berechnen? (Figur 113.)

Auflösung. Die Winkel γ und γ_1 und $\xi = \beta_1 - \beta$ sind bekannt. Aus dem Sinussatze folgt $BC = \frac{e \sin\alpha}{\sin\gamma}$, $BC_1 = \frac{e \sin\alpha_1}{\sin\gamma_1}$, also aus dem Cosinussatze die Berechnungsformel

$$x = e\sqrt{\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right)^2 + \left(\frac{\sin\alpha_1}{\sin\gamma_1}\right)^2 - 2\,\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot\frac{\sin\alpha_1}{\sin\gamma_1}\cos\xi}.$$

30) Bei der letzten Aufgabe mußte mit den Feldmeßapparaten bei A und B gearbeitet werden. Wichtiger ist es für den Landmesser, den Ort eines Standpunktes zu bestimmen, indem man nur von dort aus nach den Ecken eines bereits festgelegten Dreiecks visiert. Dies ist die sogenannte Pothenotsche Aufgabe oder das sogenannte Rückwärtseinschneiden. Die Aufgabe kommt auf folgende hinaus:

Fig. 114.



Aufgabe. Die Seiten a und b eines Dreiecks, von dem man auch den Winkel γ kennt, erscheinen von einem Standpunkte D aus unter den Winkeln α und β. Wie weit ist D von den Ecken A, B und C entfernt?

Digitized by Google

Auflösung. In Figur 114 ist $\frac{\xi+\eta}{2} = 180^0 - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$. Aus $\frac{y}{b} = \frac{\sin\xi}{\sin\beta}$ und $\frac{y}{a} = \frac{\sin\eta}{\sin\alpha}$ folgt durch Division $\frac{\sin\xi}{\sin\eta} = \frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}$ und daher auch $\frac{\sin\xi+\sin\eta}{\sin\xi-\sin\eta} = \frac{a\sin\beta+b\sin\alpha}{a\sin\beta-b\sin\alpha}$, oder unter Anwendung der Summierungsformeln und einer einfachen Umformung

$$\frac{\tan\frac{\xi+\eta}{2}}{\tan\frac{\xi-\eta}{2}} = \frac{1+\frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta}}{1-\frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta}},$$

also

$$\tan\frac{\xi-\eta}{2} = \frac{1-\frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta}}{1+\frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta}}\tan\frac{\xi+\eta}{2}.$$

Daraus bestimmt sich $\frac{\xi-\eta}{2}$, so daß man mit Hülfe von $\frac{\xi+\eta}{2}$ auch ξ und η findet.

Nach dem Sinussatze erhält man schließlich

$$x = a\frac{\sin(\eta+\alpha)}{\sin\alpha}, \quad y = a\frac{\sin\eta}{\sin\alpha} = b\frac{\sin\xi}{\sin\beta}, \quad z = b\frac{\sin(\xi+\beta)}{\sin\beta}.$$

Beispiel. Es sei $a = 9800$ m, $b = 12\,500$ m, $\gamma = 110^0\,20'$, $\alpha = 15^0\,8'$, $\beta = 19^0\,7'$.

Auflösung. $x = 29\,920$ m, $y = 28\,435$ m, $z = 17\,392$ m.

Im Gegensatz zum Rückwärtseinschneiden bezeichnet man die unter 29) dargestellte Messungs- und Berechnungsmethode als das Vorwärtseinschneiden. Bei größeren Entfernungen darf man die Resultate nicht ohne weiteres benutzen, da die Krümmung der Erde berücksichtigt werden muß. Ist ein Land vollständig mit einem Netze solcher Dreiecke bedeckt, so kontrollieren sie sich gewissermaßen gegenseitig. Die Genauigkeit wird groß genug, um z. B. zu gestatten, aus einem über ganze Weltteile ausgedehnten Dreiecksnetze Schlüsse auf die Erdgestalt zu ziehen, wie es bei der großen europäischen Gradmessung geschah.

Digitized by Google

VI. Zusammenstellung der wichtigsten Formeln.

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}},\quad \sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},\quad \sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,\quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha,\quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha.$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}.$$

Bedeutet $f(\alpha)$ eine goniometrische Funktion von α, so ist, abgesehen vom Vorzeichen,

$$f(\alpha) = f(\pi - \alpha) = f(\pi + \alpha) = f(2\pi - \alpha) = f(-\alpha).$$

Das Vorzeichen bestimmt sich aus der Quadrantentabelle:

Sinus	+	+	−	−
Cosinus	+	−	−	+
Tangente	+	−	+	−
Cotangente	+	−	+	−

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta.$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,\quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}},\quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}},$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}.$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}.$$

Digitized by Google

Sinussatz:

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma .$$

Cosinussatz:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\gamma .$$

Tangentensatz:

$$(a+b) : (a-b) = \tan\frac{\alpha+\beta}{2} : \tan\frac{\alpha-\beta}{2} .$$

Inhaltssatz:

$$F = \tfrac{1}{2}\,ab\sin\gamma$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} = \sqrt{pp_1p_2p_3} .$$

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{ab}} = \sqrt{\frac{p_1p_2}{ab}} ,$$

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{ab}} = \sqrt{\frac{pp_3}{ab}} .$$

$$\tan\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{(a+b+c)(a+b-c)}} = \sqrt{\frac{p_1p_2}{pp_3}} , \quad \sin\gamma = \frac{2}{ab}\sqrt{pp_1p_3p_3} .$$

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{a+b+c}} = \sqrt{\frac{p_1p_2p_3}{p}} .$$

$$\varrho_1 = \sqrt{\frac{pp_2p_3}{p_1}} , \quad \varrho_2 = \sqrt{\frac{pp_1p_3}{p_2}} , \quad \varrho_3 = \sqrt{\frac{pp_1p_2}{p_3}} .$$

$$F = p\varrho = p_1\varrho_1 = p_2\varrho_2 = p_3\varrho_3 .$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{p_1} = \frac{\varrho_1}{p} , \quad \tan\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{p_2} = \frac{\varrho_2}{p} , \quad \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{p_3} = \frac{\varrho_3}{p} .$$

Digitized by Google

Vierte Abteilung.

Stereometrie.

Die im ersten Teile aus der Anschauung entwickelten Begriffe und Grundlagen der Raumgeometrie werden in Folgendem auf mehr mathematischem Wege untersucht, wobei sich Wiederholungen nicht vermeiden lassen. Es empfiehlt sich für den Unterricht, beide Methoden vergleichend zu behandeln.

I. Begriff der Drehung und Entstehung von Drehungsgebilden.

1) Drehung um einen festen Punkt. Denkt man sich die Beweglichkeit eines (starren) Raumgebildes dadurch beschränkt, daß man einen seiner Punkte fest macht, so kann es um diesen beliebig bewegt, d. h. gedreht werden. Der geometrische Ort für alle denkbaren Lagen jedes seiner Punkte ist dabei eine Fläche, die man als Kugelfläche bezeichnet. [Kugelkörper, oder Kugel, Mittelpunkt oder Centrum, Durchmesser (Diameter), Halbmesser, (Radius), Regelmäßigkeit der Fläche u. s. w. siehe in Teil I, Geometrie, von Nr. 37 ab.]

2) Drehung um eine feste Achse. Denkt man sich die Beweglichkeit eines Raumgebildes dadurch beschränkt, daß man zwei seiner Punkte fest macht, so ist eine Drehung möglich, bei der jeder seiner Punkte einen Kreis beschreibt. Eine gewisse Reihe von Punkten beschreibt unendlich kleine Kreise, bleibt also an der Stelle. Diese Punkte bilden die (geradlinige) Drehungsachse des Körpers, die man sich bis ins Endlose verlängert denken kann. (Vergl. Teil I, Geometrie, Nr. 11.) Sie geht durch die Mittelpunkte sämtlicher Kreise, die von den Punkten des Gebildes beschrieben werden.

Digitized by Google

Jede Linie des Raumgebildes beschreibt eine Fläche, die man als Drehungsfläche (oder Rotationsfläche) bezeichnet.

Jede Gerade, welche die Drehungsachse unter einem unveränderlichen Winkel schneidet, beschreibt eine besondere Art von Kegelfläche (Kreiskegel). Der Schnittpunkt heißt die Spitze des Kegels. In ihr treffen die beiden Teile des Kegels zusammen.

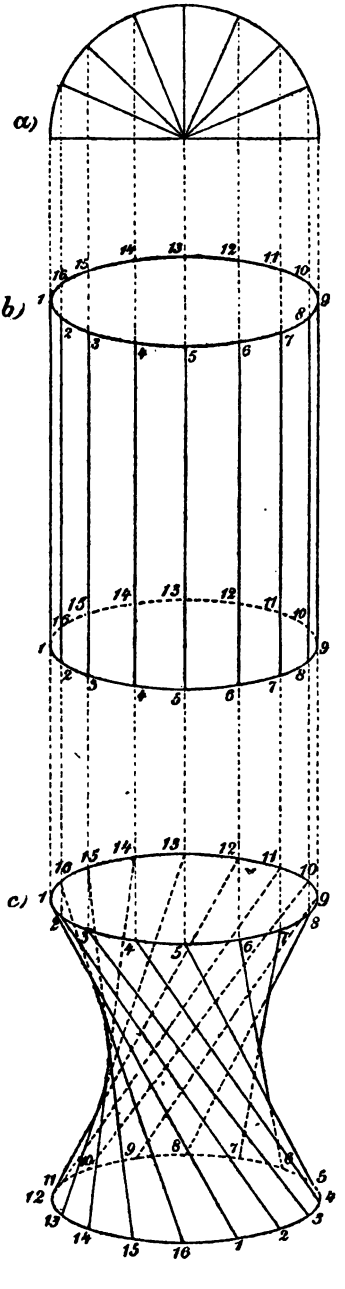
Ist der Schnittwinkel ein rechter, so geht die Kegelfläche in eine Fläche über, die man als Ebene bezeichnet.

Liegt der Schnittpunkt unendlich fern, ist also die Gerade parallel zur Drehungsachse, so entsteht eine besondere Art von Cylinderfläche (Kreiscylinder).

Jede unbegrenzte Gerade, die weder parallel zur Drehungsachse ist, noch sie irgendwo schneidet (welche sie also kreuzt, vergl. Teil I, Geom. Nr. 13), beschreibt beim Drehen eine eigentümliche Fläche, die den Namen Drehungshyperboloid*) führt. Im besonderen Falle der später zu erläuternden senkrechten Kreuzung wird diese Fläche zur Ebene.

[Ihr Modell kann man ohne Mühe anfertigen. Zwei kreisförmige Pappscheiben werden am Rande in regelmäßigen Abständen durchlöchert, und durch die Löcher werden Fäden gezogen, so daß ein Cylinder-Modell (Fig. 115 b) entsteht. Verdreht man die parallel bleibenden Pappscheiben gegen einander, so entsteht das Modell einer nach der Mitte hin eingeschnürten Fläche, der

Fig. 115.



*) Die Entstehung des Namens kann hier noch nicht erklärt werden.

Digitized by Google

besprochenen Hyperboloidfläche (Fig. 115 c). Man kann durch fortgesetztes Verdrehen die Einschnürung so weit treiben, daß der (doppelte) Kegel entsteht. Fig. 115 a deutet an, wie die Zeichnung korrekt herzustellen ist.]

Jeder Halbkreis, dessen Durchmesser mit der Drehungsachse zusammenfällt, beschreibt eine Kugel, denn die Radien des Halbkreises bleiben auch bei der Drehung einander gleich und werden solche der Kugel.

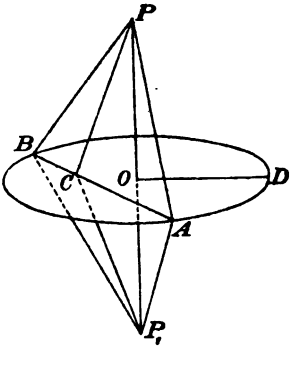
3) Unbeweglichkeit. Macht man drei nicht in einer Geraden liegende Punkte eines starren Raumgebildes fest, so ist eine Drehung und überhaupt eine Bewegung nicht mehr möglich. An Stelle der drei Punkte können eine Gerade und ein Punkt außerhalb derselben treten. Auch zwei Gerade leisten dasselbe.

II. Ebenen und Gerade im Raume.

4) Gerade und Normalebene. Nach 2) entsteht eine Ebene durch Drehung einer Geraden um eine sie senkrecht schneidende Achse. Aus dieser Entstehungsart lassen sich die Eigenschaften der Ebene ableiten.

Markiert man auf der Drehungsachse zwei Punkte, die gleichweit von der Geraden entfernt sind, so ist jeder Punkt der letzteren von den beiden markierten Punkten gleichweit entfernt. Dies bleibt auch bei der Drehung der Fall, so daß jeder Punkt der entstehenden Ebene gleichweit von den beiden markierten Punkten entfernt ist. Folglich:

Fig. 116.



Die Ebene ist der geometrische Ort aller Raumpunkte, die von dem einen von zwei festen Punkten dieselbe Entfernung haben, wie von dem andern.

Verbindet man zwei beliebige Punkte A und B der entstandenen Ebene (Fig. 116) durch eine Gerade, so liegt diese ganz in der Ebene. Verbindet man nämlich A und B und außerdem einen beliebigen Punkt C der Geraden mit den markierten Punkten P und P_1, so ist zunächst $\triangle APB \cong \triangle AP_1B$, weil Übereinstimmung in allen drei Seiten stattfindet, folglich $\sphericalangle BAP = \sphericalangle BAP_1$. Daraus folgt, daß

Digitized by Google

$\triangle CAP \cong \triangle CAP_1$ ist, folglich ist $CP = CP_1$. Demnach liegt C und ebenso jeder andere Punkt der Geraden AB und ihrer Verlängerung in der entstandenen Ebene. Also:

Die Ebene ist diejenige Fläche, die jede Gerade, die zwei Punkte mit ihr gemein hat, ganz in sich aufnimmt.

Da bei der Drehung des rechten Winkels (POD in Fig. 116) um den einen Schenkel (PO) seine Größe sich nicht ändert, so steht jede durch O gelegte Gerade der entstandenen Ebene auf der Drehungsachse PP_1 senkrecht. Daher sagt man, die Ebene stehe senkrecht auf der Drehungsachse, sie sei eine Normalebene der Achse PP_1. Umgekehrt sagt man, die Drehungsachse stehe senkrecht auf der Ebene, sei eine Normale derselben. (Lot auf der Ebene.)

Man kann auch sagen: Der geometrische Ort aller Geraden, die auf einer anderen Geraden in einem gegebenen Punkte senkrecht stehen, ist eine Normalebene der letzteren Geraden.

Die Gerade AB in Fig. 116 liegt in einer Ebene, die senkrecht zu PP_1 ist und schneidet dabei PP_1 nicht. Da die Parallele zu AB, die sich in der Ebene durch O legen läßt, senkrecht zu PP_1 ist, so sagt man, AB kreuze die Gerade PP_1 senkrecht. Bei der Drehung um PP_1 bewegt sich die Ebene in sich selbst, folglich beschreibt AB dabei dieselbe Ebene. Dies ist der unter 2) bei dem Drehungshyperboloid bemerkte Specialfall.

5) Festlegung einer Ebene. Macht man zwei Punkte einer unbegrenzten Ebene fest, so ist eine Drehung möglich. Nimmt man außerhalb der geraden Verbindungslinie einen festen Punkt im Raume an, so kann man die Ebene so weit drehen, daß sie auch durch diesen Punkt geht. Folglich:

Durch drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, läßt sich stets eine Ebene legen.

Es läßt sich aber nur eine einzige Ebene durch drei solche Punkte legen, denn macht man diese Punkte der Ebene fest, so ist sie nach 3) unbeweglich, und eine zweite Lage für sie ist unmöglich. Ebenen, die drei nicht in einer Geraden liegende Punkte gemein haben, fallen in allen Punkten zusammen. Demnach ist eine Ebene auch durch eine Gerade und einen Punkt außerhalb derselben eindeutig bestimmt.

In der so bestimmten Ebene läßt sich zur gegebenen Geraden eine Parallele legen. Also ist eine Ebene auch durch zwei gegebene Parallele vollständig bestimmt.

Ebenso ist eine Ebene durch zwei sich schneidende Gerade

Digitized by Google

eindeutig bestimmt, denn diese lassen sich als Verbindungslinien dreier gegebener Punkte betrachten.

So ist z. B. die Normalebene zu einer Geraden in jedem Punkte der letzteren vollständig bestimmt, sobald man auf der Geraden in dem betreffenden Punkte zwei Lote errichtet. Man schließt daraus:

Wird eine Ebene von einer Geraden geschnitten, und steht die letztere senkrecht auf zwei durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogenen Geraden, so ist die Gerade ein Lot auf der Ebene, und die Ebene ist eine Normalebene der Geraden.

Durch vier Punkte läßt sich im allgemeinen keine Ebene legen, denn der vierte Punkt braucht nicht in der durch die drei anderen bestimmten Ebene zu liegen.

Ebenso läßt sich durch zwei Gerade im allgemeinen keine Ebene legen, da ihre vier Endpunkte nicht in einer solchen zu liegen brauchen. Gerade, durch die sich keine Ebene legen läßt, sind die besprochenen sich kreuzenden Geraden.

6) Zwei sich schneidende Ebenen. Die Schnittlinie zweier Ebenen kann nur eine Gerade sein, denn hätten sie einen Punkt außerhalb derselben gemein, so würden die Ebenen ganz zusammenfallen. Eine krumme Linie als Schnittlinie ist also unmöglich.

[Hält man zwei Punkte einer Ebene fest, so ist eine Drehung möglich. Die unveränderliche Drehungsachse ist die Schnittlinie für je zwei Lagen der Ebene. Sie muß also eine Gerade sein. Letzteres ist auch bei jedem Körper der Fall, von dem zwei Punkte festgehalten werden, denn durch diese läßt sich stets eine Ebene legen. So bestätigt sich die entsprechende Bemerkung in 2.]

7) Schnittwinkel zweier Ebenen. In Fig. 117 ist ein Rechteck $ABCD$ dargestellt, welches durch Drehung um die Mittellinie PQ in verschiedene Lagen $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, $A_3B_3C_3D_3$ gebracht worden ist. Dabei haben sich die Geraden AD und BC auf einem Kreiscylinder bewegt, die Geraden AB und CD dagegen in Normalebenen zu PQ, die man als die Grundflächen (Grundkreise) des Cylinders bezeichnet. Folgen nun die verschiedenen Lagen von AB bezw. CD z. B. unter Winkeln von 45^0 aufeinander, so sagt man auch von dem Schnittwinkel je zweier benachbarter dieser Ebenen, daß er 45^0 betrage.

Also: Man mißt den Schnittwinkel zweier Ebenen, indem man auf der Schnittlinie in einem Punkt Lote er-

Digitized by Google

richtet, die in den Ebenen liegen, und in der Ebene dieser Lote den von ihnen eingeschlossenen Winkel mißt.

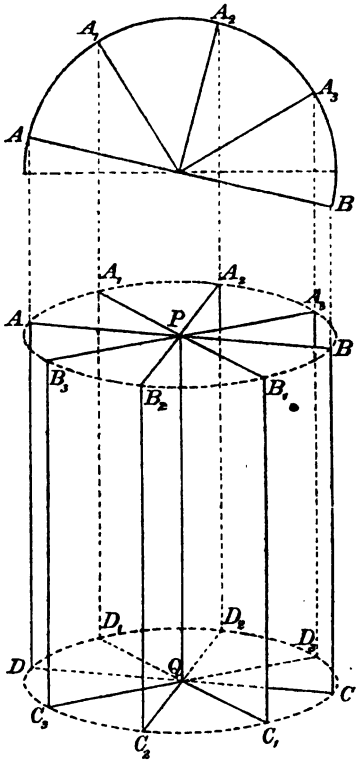
In Fig. 117 stehen z. B. sämtliche durch PQ gelegte Ebenen auf beiden Grundebenen senkrecht, denn die Ebene $ABCD$ z. B. hat mit der unteren Ebene die Schnittlinie CD, auf der in Q die Lote QP und QC_2 errichtet sind. Nun ist aber PQC_2 ein rechter Winkel, also steht die Ebene $ABCD$ senkrecht auf der Grundebene. Folglich:

Sämtliche Ebenen, die sich durch eine Gerade legen lassen, stehen senkrecht auf jeder Normalebene der Geraden.

In Fig. 117 ist $ABCD$ Normalebene zu C_2D_2. Sie steht auf der Grundebene senkrecht, weil $\sphericalangle C_2QP = 90^0$ ist. Folglich:

Jede Normalebene zu einer Geraden einer Ebene steht auf der letzteren senkrecht.

Fig. 117.



Stehen zwei sich schneidende Ebenen senkrecht auf einer dritten, so steht auch ihre Schnittlinie senkrecht auf der dritten. Handelt es sich z. B. um die Ebenen $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$, die sich in PQ schneiden und auf der Grundebene (Fig. 117) senkrecht stehen, so muß das auf der letzteren in Q errichtete Lot beiden Ebenen gemeinsam sein, also mit ihrer Schnittlinie zusammenfallen.

8) Parallele Ebenen. Die um PQ gedrehten Geraden AB und DC in Fig. 117 haben an allen Stellen denselben Abstand von einander. Durch die Drehung der durch AB und DC gelegten Ebenen um PQ wird dies nicht geändert, die entstehenden Grundebenen haben also überall denselben Abstand von einander, der durch das gemeinschaftliche Lot PQ gemessen werden kann. Folglich: Die Normalebenen derselben Geraden sind unter einander parallel.

Zieht man in einer von zwei parallelen Ebenen eine Gerade,

Digitized by Google

so hat sie von der anderen Ebene überall denselben Abstand, man sagt also, die Gerade sei zur anderen Ebene parallel.

Legt man durch die Gerade eine die parallele Ebene schneidende Ebene, so ist die Schnittlinie zur Geraden parallel, denn soweit man auch beide Gerade verlängert, giebt es doch keinen Schnittpunkt, obwohl sie derselben Ebene angehören.

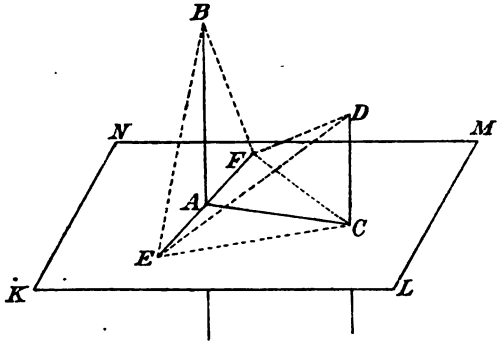
Sind eine Ebene und eine Gerade parallel, so lassen sich demnach in der Ebene unzählige Parallelen zur Geraden ziehen.

Eine Ebene ist zu einer Geraden parallel, wenn sich in der Ebene eine Parallele zur Geraden ziehen läßt.

Zwei Ebenen sind parallel, wenn zwei sich schneidende Geraden in der einen zur anderen Ebene parallel sind. Denn schnitten sich die Ebenen, so müßte die Schnittlinie zu jeder der sich schneidenden Geraden parallel sein, was unmöglich ist.

Zieht man in zwei parallelen Ebenen zwei nicht parallele Geraden, so schneiden sie sich nicht, obwohl sie nicht parallel sind, sie kreuzen sich also. Legt man durch die sich kreuzenden Geraden Ebenen, die auf den beiden gegebenen Ebenen senkrecht stehen, so schneiden sie sich in einer Geraden, die senkrecht auf beiden Ebenen, also auch senkrecht auf den sich kreuzenden Geraden steht. So findet man das gemeinschaftliche Lot und zugleich den kleinsten Abstand der sich kreuzenden Geraden. Die beiden Hülfsebenen haben einen Schnittwinkel, den man zugleich den Kreuzungswinkel der beiden Geraden nennt.

Fig. 118.



9) Parallele Gerade im Raume. In Fig. 118 sind zwei Gerade AB und CD dargestellt, die auf einer Ebene $KLMN$ senkrecht stehen. Es fragt sich, ob diese Lote als parallel betrachtet werden dürfen. Zur Untersuchung ziehe man AC und durch A in der Ebene $EF \perp AC$, wobei $EA = FA$ gemacht werde. Verbindet man E und F mit B, C und D, so findet man aus der Kongruenz entsprechender Dreiecke, daß auch $EB = FB$,

Digitized by Google

$EC = FC$, $ED = FD$ ist, folglich liegen B, A, C und D als Punkte, die gleichweit von E und F entfernt sind, in einer Ebene. In dieser Ebene ist $AB \parallel CD$, denn beide stehen senkrecht auf AC. Folglich:

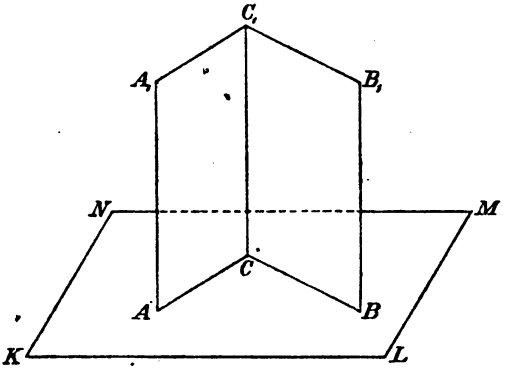
Lote auf derselben Ebene sind zu einander parallel.

Zugleich bestätigt sich die Möglichkeit, durch zwei parallele Gerade eine Ebene zu legen.

Steht von zwei parallelen Geraden die eine senkrecht auf einer Ebene, so steht auch die andere senkrecht auf der Ebene.

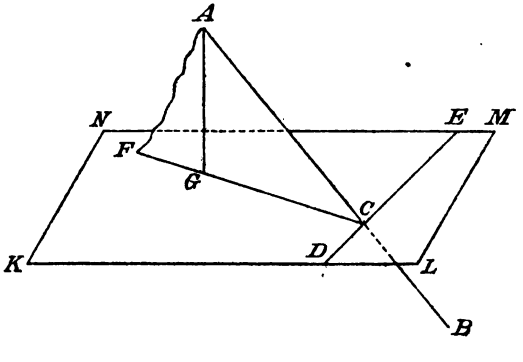
Sind zwei Gerade zu einer dritten parallel, so sind sie unter sich parallel, denn legt man zur dritten eine Normalebene, so ist diese zugleich Normalebene für die beiden anderen.

Fig. 119.



Legt man durch zwei parallele Gerade Ebenen, die sich schneiden, so wird die Schnittlinie zu beiden Geraden parallel. Denn legt man zu AA_1 in Fig. 119 eine Normalebene $KLMN$, so ist diese auch normal zur Parallelen BB_1. Die Ebenen AA_1C_1C und BB_1C_1C stehen aber senkrecht auf der Ebene $KLMN$, folglich ist ihr Schnitt CC_1 ein Lot auf derselben und als solches parallel zu AA_1 und BB_1.

Fig. 120.



10) Schnittwinkel zwischen einer Geraden und einer Ebene. Eine Gerade AB (Fig. 120) schneide eine Ebene $KLMN$ in C. Denkt man sich in C die Normalebene zu AB, so schneidet

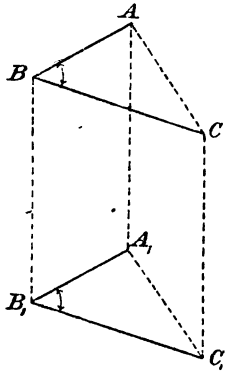
Digitized by Google

diese die gegebene Ebene in einer Geraden DE senkrecht zu AC. Errichtet man in dieser Grundebene auf DE das Lot CF, so ist ACF die Normalebene zu DE, sie steht also senkrecht zur Grundebene. Die durch AC gelegte Ebene, die senkrecht zur Grundebene steht, heißt die projizierende Ebene von AC. In ihr befindet sich die durch das Lot AG begrenzte Projektion GC von AC. In der projizierenden Ebene wird der von der Geraden und der Ebene gebildete Winkel gemessen. Er ist der Komplementwinkel des Winkels, den das in C auf der Ebene errichtete Lot mit AC bildet.

Suche zu beweisen, daß jede in der Grundebene durch C gelegte Gerade mit AC einen größeren Winkel bildet als FC. Winkel ACG ist zugleich der Schnittwinkel, den die Grundebene mit der durch A und DE bestimmten Ebene bildet. Dabei ist AC die steilste Linie, die sich von A aus auf dem schrägen Dache ziehen läßt. (Warum?) In dieser Beziehung ist also ACG ein größter Winkel, während er vorher als kleinster auftrat.

11) Winkel im Raume, deren Schenkel gleichgerichtet sind, sind einander gleich. In Fig. 121 mögen die Winkel ABC und $A_1B_1C_1$ gleichgerichtete Schenkel haben. Je zwei gleichgerichtete mache man gleich lang und lege durch sie Ebenen. Diese Ebenen ABB_1A_1 und BCC_1B_1 sind dann Parallelogramme, so daß $AA_1 \# BB_1$ und $CC_1 \# BB_1$, also auch $AA_1 \# CC_1$ ist. Durch letztere Linien läßt sich also eine Ebene ACC_1A_1 legen, die ein Parallelogramm ist, so daß $AC \# A_1C_1$ wird. Jetzt ist $\triangle ABC \cong A_1B_1C_1$ wegen der Uebereinstimmung in den drei Seiten, also ist $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A_1B_1C_1$.

Fig. 121.



12) Übungsaufgaben. a) Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten, so sind die Schnittlinien parallel, und zwischen den Schnittwinkeln finden dieselben Beziehungen statt, wie bei parallelen Geraden, die von einer dritten geschnitten werden. Stelle diese Beziehungen auf und beweise das Entsprechende.

b) Untersuche die Beziehungen für den Fall, daß zwei parallele Ebenen von einer Geraden geschnitten werden.

c) Welche Proportionen finden statt, wenn drei parallele Ebenen

Digitized by Google

von zwei sich kreuzenden Geraden geschnitten werden? Was findet statt, wenn die schneidenden Geraden parallel sind?

d) Zwei Ebenen mögen mit einander den Schnittwinkel α bilden. Innerhalb des Winkels liege ein Punkt, von dem aus Lote nach beiden Ebenen gefällt werden. Welchen Winkel bilden diese mit einander? Welchen Winkel bilden aber die Lote, wenn ihr Ausgangspunkt außerhalb des durch den Winkel und seinen „Scheitelwinkel" bestimmten Raumes liegt. (Bilden die Lote den Winkel α, so sollen sie Lote gleichen Sinnes heißen, bilden sie den Winkel $180^0 - \alpha$, so sollen sie als Lote entgegengesetzten Sinnes bezeichnet werden. Solche sind z. B. die beiderseits nach außen gehenden Lote.)

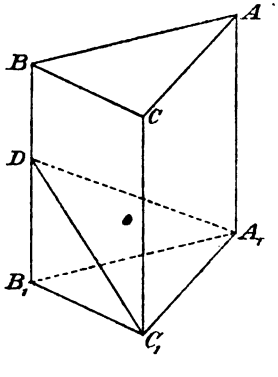
e) Werden die Seitenkanten eines n-seitigen Prismas durch parallele Ebenen geschnitten, so sind die Schnitte kongruente Flächen.

f) Der Parallelschnitt zur Grundfläche einer n-seitigen Pyramide ist der Grundfläche ähnlich. (Vgl. Teil I. Seite 208.)

III. Die körperlichen Ecken.*)

13) Mehrere Ebenen. In Fig. 122 sind zwei Ebenen ABB_1A_1 und BCC_1B_1 dargestellt, die sich in BB_1 schneiden. Bringt man eine dritte Ebene hinzu, die z. B. durch A_1C_1 gelegt wird, so sind zwei Fälle möglich. Entweder schneidet die dritte Ebene die Schnittlinie BB_1 in einem Punkte D, dann sind A_1D und C_1D ihre Schnitte mit den gegebenen Ebenen; oder sie ist parallel zur Schnittlinie BB_1, dann sind nach dem Früheren die Schnitte CC_1 und AA_1 parallel zu BB_1. Folglich: Die drei Schnittlinien dreier sich schneidenden Ebenen schneiden sich entweder in **einem** Punkte, oder sie sind parallel. Im ersteren Falle sagt man, sie bilden eine dreiseitige körperliche Ecke. (So hat man z. B. jede Ecke einer dreiseitigen Pyramide als eine dreiseitige körperliche Ecke zu betrachten.) Im anderen Falle erhält man die Kanten eines dreiseitigen Prismas.

Fig. 122.



*) Abschnitt III kann auf dem Gymnasium überschlagen werden.

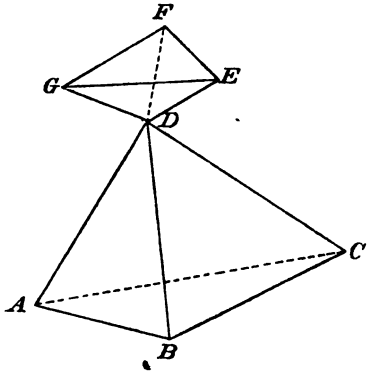
Digitized by Google

14) Ecke. Zieht man durch einen Punkt des Raumes n beliebige Gerade und legt man durch je zwei aufeinanderfolgende derselben eine Ebene, so entstehen n Ebenen, die sämtlich durch den gegebenen Punkt gehen. Von ihnen sagt man, sie bilden eine n-seitige körperliche Ecke. So ist z. B. die Spitze jeder n-seitigen Pyramide eine n-seitige Ecke.

Der Ausgangspunkt der n Geraden heißt der Scheitel der Ecke (die Spitze), die Geraden heißen die Kanten der Ecke, die von den Kanten eingeschlossenen Winkel heißen die Kantenwinkel, die von den Kanten begrenzten Ebenen (ins Endlose ausgedehnt zu denken) heißen die Seiten (Seitenflächen) der Ecke, die Schnittwinkel benachbarter Seiten heißen die Winkel (Seitenwinkel oder Flächenwinkel) der Ecke. Ecken, bei denen überstumpfe Winkel nicht vorkommen, werden convexe Ecken genannt. Nur von solchen soll hier die Rede sein.

[15) Polar-Ecke. Errichtet man im Scheitel ein Lot auf jeder Seite der Ecke, so bilden die n Lote eine neue Ecke, die Polarecke der gegebenen. In Fig. 123 ist z. B. die dreiseitige Ecke $D(ABC)$ dargestellt. Auf BCD ist das Lot DE, auf CAD das Lot DF, auf ABD das Lot DG errichtet. Die Ecke $D(EFG)$ ist die Polarecke der vorigen. Weil nun BD sowohl auf DE, als auch auf DG senkrecht ist, so ist BD ein Lot auf der Fläche DEG, CD ein Lot auf DEF und DA ein Lot auf DFG. Folglich gilt allgemein der Satz: Ist eine Ecke die Polarecke einer anderen, so ist die letztere zugleich die Polarecke der ersteren.

Fig. 123.



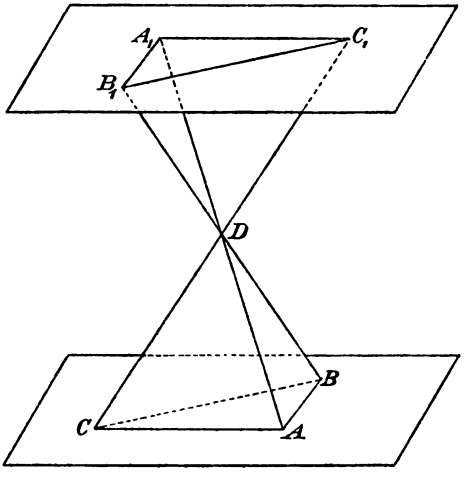
Die auf den zwei Nachbarflächen jeder Ecke errichteten Lote gehen beide nach außen, sind also nach 12) solche entgegengesetzten Sinnes. Bilden also die Nachbarflächen den Winkel α, so bilden die Lote den Winkel $180^0 - \alpha$. Folglich: Die Seitenwinkel jeder Ecke sind die Supplementwinkel zu den Kantenwinkeln der Polarecke (und umgekehrt).]

16) Scheitelecke. Verlängert man die Kanten einer Ecke einer dreiseitigen Ecke über den Scheitel hinaus, so entsteht die Scheitel-

Digitized by Google

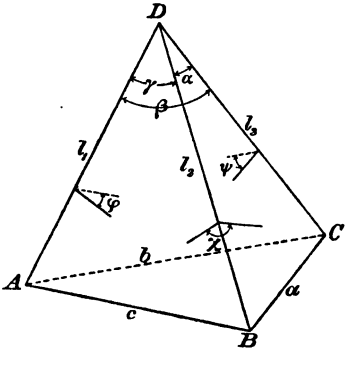
ecke der Ecke. Obwohl diese dieselben Seitenwinkel und Kantenwinkel hat, wie die gegebene, ist sie ihr im allgemeinen doch nicht kongruent, denn die einzelnen Teile folgen in entgegengesetzter Reihenfolge aufeinander. Jedoch lassen sich beide Ecken in symmetrische Lage bringen. So läßt sich z. B. die obere der beiden dreiseitigen Ecken in Fig. 124 so unter die Grundfläche stellen, daß sie als das Spiegelbild der unteren Ecke gegen die Grundfläche erscheint. Ganz allgemein erkennt man in ähnlicher Weise den Satz: **Die Scheitelecke jeder n-seitigen Ecke ist ein symmetrisches Gebilde (Spiegelbild) der letzteren.**

Fig. 124.



17) Um über dreiseitige Ecken Sätze aussprechen zu können, bezeichne man den Scheitel mit D, die Ecke selbst mit $D(ABC)$. Es empfiehlt sich, die Kanten als gleich groß anzunehmen, also $l_1 = l_2 = l_3$. Im Grundbreieck ABC bezeichne man die Gegenseiten der Dreiecksecken gleichnamig mit a, b, c. Die Kantenwinkel bei D oder die Seiten seien α, β und γ, und zwar so bezeichnet, daß sie der Reihe nach den Dreiecksseiten a, b, c gegenüberliegen. Die zu l_1, l_2 und l_3 gehörigen Seitenwinkel oder Winkel seien φ, χ, ψ.

Fig. 125.



Nach 16) kann man von Ecken mit übereinstimmenden Stücken nicht ohne weiteres die Kongruenz beweisen, sondern es bleibt unentschieden, ob es sich um Symmetrie oder Kongruenz handelt. Im Falle der Symmetrie aber ist dann die Scheitelecke der einen Ecke der anderen kongruent.

Digitized by Google

18) Die Hauptfälle der Kongruenz bezw. Symmetrie dreiseitiger Ecken ergeben sich aus der Übereinstimmung in 1) α, β und ψ, 2) α, χ und ψ, 3) α, β, γ, 4) φ, χ, ψ. Also:

Zwei dreiseitige Ecken sind entweder kongruent oder symmetrisch, wenn sie übereinstimmen

1) in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel,
2) in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln,
3) in den drei Seiten,
4) in den drei Winkeln.

Im Falle des gleichartigen Aufeinanderfolgens der Stücke kann man die Kongruenz ganz ähnlich beweisen, wie bei den Dreiecken, z. B. im Falle 1) folgendermaßen:

Man lege die Seite α' Fig. 126b so auf α in Fig. 126a, daß das gleichschenklige Dreieck $B'C'D'$ auf BCD fällt. Weil nun die Seitenwinkel ψ' und ψ übereinstimmen, so fällt die Fläche $D'C'A'$ in die Richtung von DCA. Da aber β' und β gleich sind, so fällt Dreieck $D'C'A'$ genau auf DCA. Ganz von selbst muß nun Dreieck $D'B'A$ auf DAB fallen, demnach deckt sich alles, und auch die übrigen Seiten und Winkel der Ecken $D(ABC)$ und $D'(A'B'C')$ stimmen überein.

Fig. 126a.

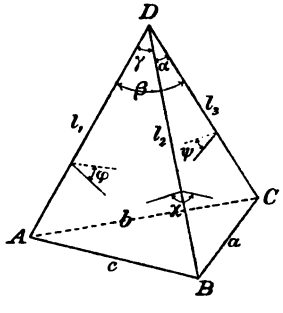
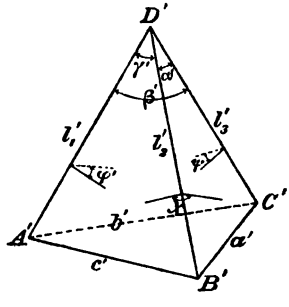


Fig. 126b.



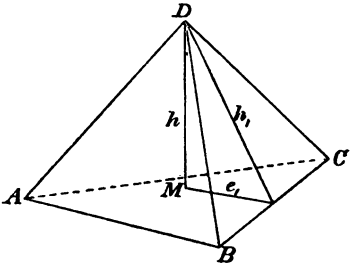
Beweis für Fall 2, wenn Übereinstimmung in den α, χ und ψ stattfindet. Man legt $D'B'C'$ auf DBC, dann fällt wegen $\psi' = \psi$ Dreieck $D'A'C'$ in die Richtung von DAC und wegen $\chi' = \chi$ Dreieck $D'B'A'$ in die Richtung von DBA. Da aber die so ineinander fallenden Flächenpaare nur eine einzige Schnittlinie haben können, so muß Kante $D'A'$ auf DA fallen, womit die Kongruenz und die Übereinstimmung der übrigen Stücke nachgewiesen ist.

Beweis für Fall 3. Weil $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ und $l_1 = l'_1$, $l_2 = l'_2$, $l_3 = l'_3$ ist, so sind die gleichschenkligen Seitendreiecke kongruent,

Digitized by Google

also $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, d. h. die Grundflächen stimmen überein. Aber auch die Höhen beider Pyramiden stimmen in der Lage und Länge vollständig überein. Sie liegen nämlich im gemeinschaftlichen Durchschnitt der drei Normalebenen in den Halbierungspunkten von a, b und c bezw. a_1, b_1, c_1, d. h. ihr Fußpunkt ist der Mittelpunkt M des umbeschriebenen Kreises der Grundfläche. Setzt man also die Grundfläche $A'B'C'$ auf ABC, so fallen die Höhen beider Pyramiden in einander, und da in beiden $h = \sqrt{h_1^2 + e_1^2}$ und $h' = \sqrt{h_1'^2 + e_1'^2}$ dasselbe ist, so fällt D' mit D zusammen. Folglich fallen die Kanten zusammen, und die Kongruenz ist nachgewiesen.

Fig. 127.

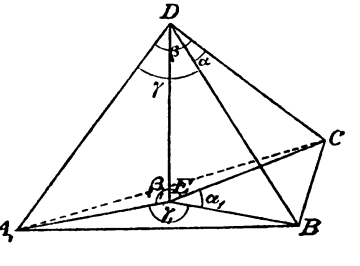


Weil endlich zu kongruenten Ecken kongruente Polarecken gehören, so sind Ecken auch kongruent bezw. symmetrisch, wenn die drei Winkel übereinstimmen. Fall 4) bedarf also keines neuen Beweises.

Von anderen Fällen möglicher Kongruenz und Symmetrie wird hier abgesehen, da vielfach Mehrdeutigkeit eintritt.

19) Sind bei einer n-seitigen Ecke die Seiten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ und ebenso die $\varphi, \chi, \psi, \omega, \ldots$ einander gleich, so handelt es sich, wie leicht zu zeigen ist, um die Seitenflächen einer regelmäßigen n-seitigen Pyramide. Solche Ecken heißen regelmäßige Ecken. Hierher gehören z. B. die Ecken der in Teil I besprochenen regelmäßigen Körper.

Fig. 128.



20) Die Summe der Kantenwinkel einer Ecke ist stets kleiner als 360^0. Bei Fig. 128 ist dies an der dreiseitigen Ecke (mit gleich langen Kanten) leicht nachzuweisen. Projiziert man nämlich D auf die Ebene ABC, so entstehen gleichschenklige Dreiecke BCE, CAE, ABE, deren Winkel an der Spitze $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ größer sind als α bezw. β, γ, denn es sind z. B. die Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks BCE kleiner als die des über

Digitized by Google

derselben Grundlinie stehenden Dreiecks BCD. Da nun $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 360^0$ ist, so ist $\alpha + \beta + \gamma < 360^0$.

Hierauf beruht z. B. der Nachweis, daß nur fünf regelmäßige Polyeder möglich sind. (Vergl. Teil I Stereometrie Nr. 14.)

IV. Die Fundamental-Konstruktionen und einige Anwendungen derselben.

21) Die in Folgendem gegebenen Konstruktionen sind zunächst nur in der Vorstellung durchzuführen.

a) Auf einer gegebenen Geraden in einem gegebenen Punkte die Normalebene zu errichten.

Auflösung. Man denke sich durch die Gerade zwei Ebenen gelegt und in diesen vom Schnittpunkte aus Lote auf der Geraden gezeichnet. Durch diese beiden Lote ist die Normalebene vollständig bestimmt.

b) Auf einer gegebenen Ebene und zwar über einer gegebenen Geraden derselben die senkrechte Ebene zu errichten.

Auflösung. Man errichte auf der gegebenen Geraden in einem beliebigen ihre Punkte das in der gegebenen Ebene liegende Lot. Die Normalebene zu letzterem im Fußpunkte des Lotes ist die gesuchte Ebene.

c) Auf einer gegebenen Ebene in einem gegebenen Punkte ein Lot zu errichten.

Auflösung. Man lege durch den Punkt in der gegebenen Ebene eine beliebige Gerade, errichte über ihr die senkrechte Ebene und in dieser auf der Geraden im gegebenen Punkte ein Lot. — Hierauf beruht die Konstruktion senkrechter Prismen über gegebenen Grundflächen.

d) Von einem gegebenen Raumpunkte aus auf eine gegebene Ebene ein Lot zu fällen.

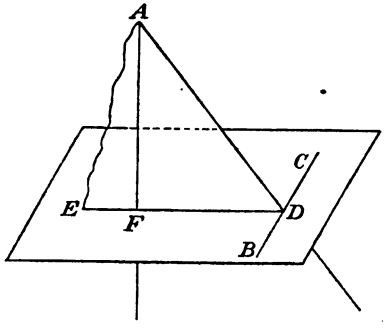
Auflösung. Man ziehe in der Ebene eine beliebige Gerade BC (Fig. 129). In der durch den gegebenen Punkt A und diese Gerade bestimmten Ebene fälle man ein Lot AD auf die Gerade. In D errichte man auf BC das in der gegebenen Ebene liegende Lot DE. In der durch AD und DE bestimmten Ebene fälle man von A aus das Lot AF auf DE. (Eine Variante ergiebt sich aus Nr. 10.) Hierauf beruht die Lehre von der senkrechten Projektion von Punkten und Geraden auf Ebenen; z. B.

Digitized by Google

e) Eine gegebene Gerade auf eine gegebene Ebene zu projizieren.

Für den Fall des Schneidens ist die Auflösung bereits durch 10) gegeben. Im Falle des Parallelismus hat man von einem der Punkte der Geraden aus ein Lot auf die Ebene zu fällen. Durch dieses und die gegebene Gerade ist übrigens für alle Fälle die projizierende Ebene bestimmt.

Fig. 129.



f) Durch die eine von zwei sich kreuzenden Geraden eine Ebene zu legen, die zur anderen parallel ist.

Auflösung. Man lege durch die zweite Gerade eine die erste schneidende Ebene. In dieser Ebene ziehe man durch den Schnittpunkt eine Parallele zur zweiten Geraden. Die Parallele und die erste Gerade bestimmen die gesuchte Ebene.

g) Das gemeinschaftliche Lot (und den kürzesten Abstand) zweier sich kreuzenden Geraden zu finden.

Auflösung. Lege durch jede der gegebenen Geraden eine zur anderen parallele Ebene und durch jede der Geraden die auf beiden Hülfsebenen senkrechte Ebene. Die beiden letzteren Ebenen schneiden sich in dem gesuchten Lote.

h) Den Schnittwinkel zweier Ebenen zu halbieren.

Auflösung. Man konstruiere in einem beliebigen Punkte der Schnittlinie die Normalebene, so daß durch die Schnitte der letzteren mit den gegebenen Ebenen der Schnittwinkel sichtbar wird. Die Halbierungslinie dieses Winkels (in der Normalebene) und die erstgenannte Schnittlinie bestimmen die halbierende Ebene.

Auch die Konstruktion vorgeschriebener Flächenwinkel, das Antragen gegebener Flächenwinkel, das Verdoppeln gegebener Flächenwinkel geschieht mit Hülfe einer Normalebene zur gegebenen Schnittlinie. Man kann also über beliebigen Grundflächen auch schräge Prismen konstruieren, deren Seitenkanten gegebene Projektionsrichtung und gegebene Neigung haben.

22) Einige Übungsaufgaben, bei denen die Konstruktionen zunächst nur in der Vorstellung durchzuführen sind. Die Zeichnungen befinden sich teilweise in Teil I. Stereometrie.

a) Einen Würfel von gegebener Kantenlänge k zu konstruieren und an ihm die in Teil I Stereometrie Nr. 3 angegebenen Berechnungen durchzuführen.

Digitized by Google

b) Ein senkrechtes regelmäßiges Prisma von 3, 5, 6 u. s. w. quadratischen Seitenflächen mit Kante k zu konstruieren, die Oberfläche, den Inhalt, den Radius der umbeschriebenen Kugel zu bestimmen, den letzteren auch zu konstruieren, etwaige Diagonalen und Diagonalflächen nach Größe und Neigung zu untersuchen.

c) Dieselben Aufgaben für ein regelmäßiges Prisma von Grundkante k und Höhe h.

d) Dieselben Aufgaben für ein regelmäßiges Prisma mit der Grundkante k, dessen Höhe so zu bestimmen ist, daß sich ihm eine Kugel einbeschreiben läßt.

e) Über einem Kreise von gegebenem Radius einen senkrechten Cylinder von quadratischem Querschnitt zu konstruieren, den Inhalt, den Mantel, die Oberfläche, die Radien der um- und einbeschriebenen Kugel zu bestimmen.

f) Dieselbe Aufgabe für einen Cylinder derselben Art, jedoch von Höhe h durchzuführen. (Eine einbeschriebene Kugel ist dabei nicht vorhanden.)

g) Entsprechende Aufgaben für schräge Prismen, deren Seitenkanten die Länge l und die Neigung α (z. B. 45^0) haben, während ihre Projektionen in die Richtung vorgeschriebener Kanten bezw. Diagonalen der regelmäßigen Grundfläche fallen. (Die Kugelaufgaben sind dabei ebenfalls auszuschließen.)

h) Eine senkrechte Pyramide*) von gegebener Höhe h über einem regelmäßigen Vieleck von 3, 4, 5, 6 u. s. w. Seiten von gegebener Kante zu konstruieren, die Seitenkanten, die Winkel der Seitenflächen, die Neigungswinkel der Seitenkanten und Seitenflächen gegen die Grundfläche, die Schnittwinkel benachbarter Seitenflächen, die Radien der um- und einbeschriebenen Kugel; die Oberfläche und den Inhalt des Körpers zu berechnen.

i) Entsprechende Aufgaben für den senkrechten Kreiskegel mit Grundradius r und Höhe h.

k) Die Konstruktion des regelmäßigen Oktaeders und Tetraeders, des Pyramidenwürfels, Rhombendodekaeders, des regelmäßigen Pentagondodekaeders und Ikosaeders sind im Anschluß an Teil I Stereometrie durchzuführen und geeignete Berechnungen an den Körpern vorzunehmen.

---

*) Unter senkrechten Pyramiden sollen solche verstanden werden, bei denen die Spitze senkrecht über dem Schwerpunkte der Grundfläche liegt. Ein Spezialfall sind dann die senkrechten Pyramiden mit regelmäßiger Grundfläche. Alle anderen Pyramiden heißen schiefe Pyramiden.

Digitized by Google

V. Anleitung zum korrekten stereometrischen Zeichnen.

a) Die schräge Parallelprojektion.

23) In Teil I, Stereometrie, 2) ist der Begriff der schrägen Parallelprojektion am Beispiele des Würfels bereits erörtert worden. Bei den dortigen Zeichnungen war die Richtung der Projektionsstrahlen (z. B. Sonnenstrahlen) willkürlich so gewählt worden, daß der Würfel in Frontstellung nach Art der Fig. 130 erschien, wobei die nach hinten gehenden Kanten unter 30^0 Neigung und $\frac{1}{3}$ Verkürzung gezeichnet waren.

Fig. 130.

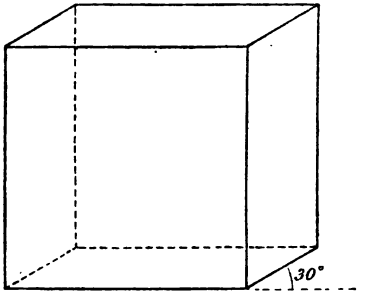
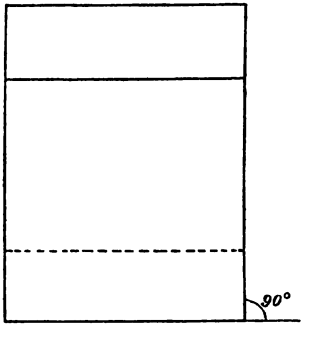


Fig. 131.



24) Für gewisse Zeichnungen, z. B. die des Cylinders, eignet sich mehr eine andere Schrägprojektion, bei der die nach hinten gehenden Geraden unter 90^0 Neigung und beliebig zu wählender Verkürzung erscheinen. In dieser Projektion würde die Würfelzeichnung nach Art der Fig. 131 erscheinen.

In diesem Sinne wird man es verstehen, wenn von der Parallelperspektive mit Neigungswinkel α^0 und der Verkürzung $\frac{1}{n}$ gesprochen wird.

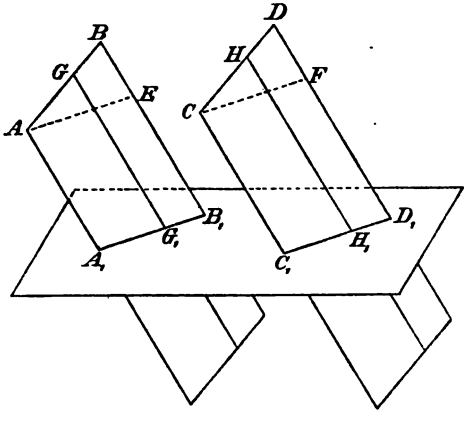
Eine ganze Reihe von Konstruktionen ist schon im ersten Teile mit Hülfe dieser geringen Vorkenntnisse streng durchgeführt worden. Dabei erschienen Parallelogramme auch in der Projektion stets als Parallelogramme. Es soll untersucht werden, ob dies allgemeine Geltung hat.

25) In Fig. 132 sind zwei gleiche und parallele Gerade AB und CD schräg auf eine Ebene projiziert worden. Die Projektionen

Digitized by Google

A_1B_1 und C_1D_1 sind nach dem Satze über parallele Ebenen, die von einer dritten geschnitten werden, parallel, und aus der Kongruenz der Dreiecke AEB und CDF, für die $AE \parallel A_1B_1$ und $CF \parallel C_1D_1$ gezeichnet ist, folgt, daß $A_1B_1 = C_1D_1$ ist. Folglich gilt der Satz:

Fig. 132.



Schräge Parallelprojektion gleicher und paralleler Geraden giebt gleiche und parallele Gerade.

Folglich werden auch Parallelogramme stets in Parallelogramme verwandelt.

26) Ferner: Sind auf einer Geraden gleiche Stücke abgetragen, so sind auch in der Projektion die entsprechenden Stücke gleich. Dasselbe ist der Fall, wenn die gleichen Stücke auf parallelen Graden abgetragen sind. Folglich: Ist eine Gerade im Verhältnis $m : n$ geteilt, so ist auch ihre Projektion in diesem Verhältnis geteilt. So ist in Fig. 132 $AG : GB = A_1G_1 : G_1B_1 = CH : HD = C_1H_1 : H_1D_1$.

Bei der schrägen Parallelprojektion bleiben die Teilungsverhältnisse auf derselben Geraden, oder auf parallelen Geraden erhalten. So bleibt z. B. Halbierung in der Projektion Halbierung, stetige Teilung bleibt stetige Teilung, harmonische Punkte bleiben harmonische Punkte.

Mit Hülfe dieser Bemerkung kann man zahlreiche Konstruktionsaufgaben lösen, z. B.

27) **Aufgabe.** Ein Quadrat mit dem einbeschriebenen Kreise, in horizontaler Frontlage befindlich, soll erstens in der Parallelperspektive mit 90^0 und $\frac{1}{3}$ Verkürzung, zweitens in der Parallelperspektive mit 45^0 und $\frac{1}{2}$ Verkürzung gezeichnet werden.

Auflösung. In Fig. 133 ist in den Kreis ein System paralleler Sehnen eingezeichnet, die in gleichen Abständen aufeinander folgen. Sämtliche sind auf $\frac{1}{3}$ verkürzt worden. $A_1B_1C_1D_1$ mit der einbeschriebenen Ellipse ist die eine der verlangten Zeichnungen.

Digitized by Google

In Fig. 134 ist $A_2B_2C_2D_2$ das Quadrat in der anderen Parallelperspektive. Wiederum ist das System paralleler, in gleichen Abständen aufeinander folgender Sehnen gezeichnet, jedoch mit Neigung 45^0 und $\frac{1}{2}$ Verkürzung. Bei der Konstruktion geht man am besten von der Mittellinie E_2F_2 aus. Die Berührungspunkte fallen in die Mittellinien. Später wird bewiesen, daß es sich um eine Ellipse handelt, deren Hauptachsen ein wenig schräg liegen.

Fig. 133.

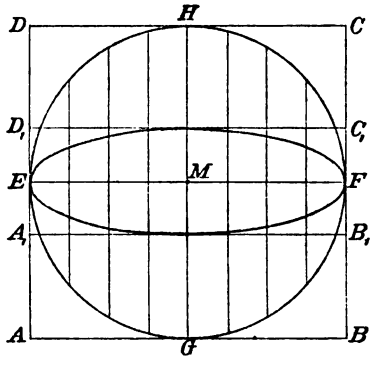
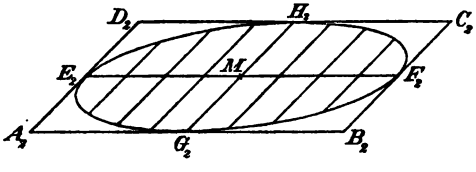
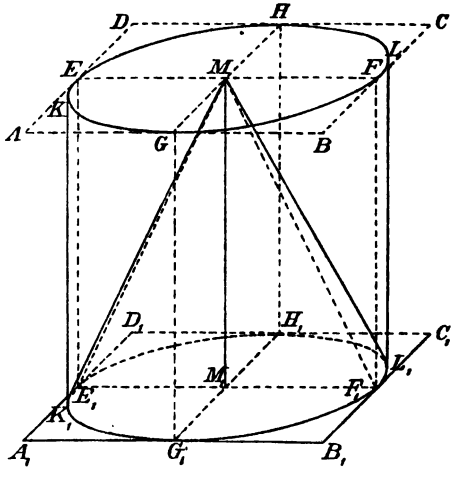


Fig. 134.



28) Daraus würde z. B. die nebenstehende Zeichnung des senkrechten Kreiscylinders in schräger Parallelperspektive von 45^0 und $\frac{1}{2}$ Verkürzung folgen. Man beachte, daß dabei der senkrechte Frontschnitt EFF_1E_1 sich durchaus nicht mit den Sichtbarkeitsgrenzen des Mantels deckt, die durch die gemeinschaftlichen Tangenten KK_1 und LL_1 dargestellt sind. Zieht man von M aus Tangenten an die untere Ellipse, so erhält man zugleich die Darstellung des Kegels mit dem Querschnitte E_1F_1M.

Fig. 135.



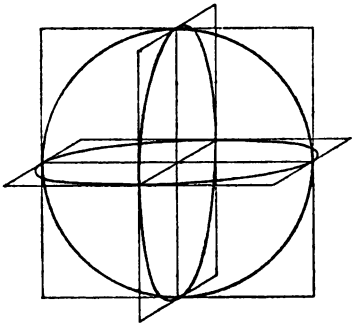
Aufgabe. Den Würfel in der Parallelperspektive 30^0 mit $\frac{1}{3}$ Verkürzung zu zeichnen und in den sichtbaren Flächen die Ellipsen zu zeichnen, durch welche die einbeschriebenen Kreise dargestellt werden.

Digitized by Google

Aufgabe. Den liegenden Cylinder in derselben Perspektive mit der Achse in Frontlage zu zeichnen.

29) **Aufgabe.** Drei Kreise gleichen Durchmessers zu zeichnen, die aufeinander senkrecht stehen und mit den Mittelpunkten zusammenfallen, wobei der eine sich in Frontstellung befindet (also als Kreis erscheint). Die Auflösung ist in Fig 136 durchgeführt. Dabei handelt es sich um die Darstellung der Hauptschnitte einer Kugel, die demnach nicht als Kreis erscheinen kann. [Auch sie erscheint als leicht zu konstruierende Ellipse, obwohl sie in den Lehrbüchen conventionell als Kreis dargestellt zu werden pflegt.]

Fig. 136.

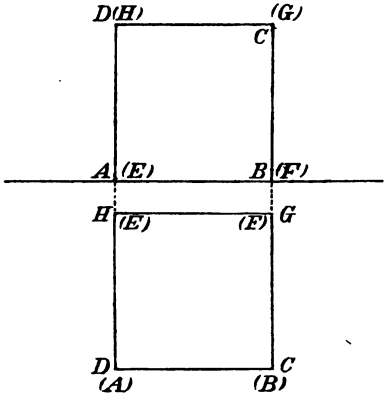


Diese Andeutungen mögen genügen. In des Verfassers Einführung in das stereometrische Zeichnen*) sind Übungsaufgaben konstruktiver Art in großer Zahl durchgeführt.

b) Die senkrechte Projektion

(orthographische oder orthogonale Projektion, die Lehre vom Grundriß und Aufriß, orthographische Axonometrie).

Fig 137.



30) In der Bau- und Maschinentechnik u. s. w. werden die darzustellenden Körper senkrecht auf eine Horizontalebene (Grundriß) und zugleich auf eine Vertikalebene (Aufriß) projiziert, bisweilen auch noch auf eine dritte, zu beiden senkrechte Ebene (Seitenansicht). Die beiden erstgenannten Zeichnungen werden dabei so auf einem Blatte vereinigt, daß der Aufriß oben, der Grundriß unten gezeichnet ist, und daß die sich gegenseitig entsprechenden Punkte beider Zeichnungen jedesmal in derselben Senkrechten liegen. So stellt z. B. Fig. 137 die Zeichnung

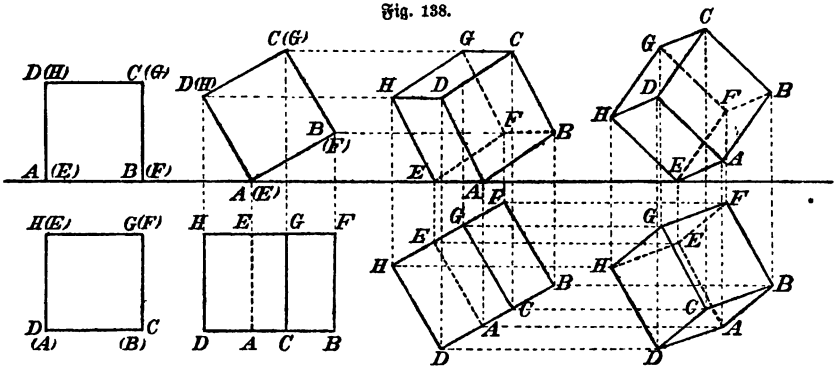
*) Leipzig, bei B. G. Teubner 1886.

Digitized by Google

des Würfels in Frontstellung dar. Im Aufriß sind A, B, C, D die sichtbaren Ecken der Vorderfläche, (E), (F), (G), (H) die von ihnen verdeckten der hinteren Fläche. Im Grundriß sind D, C, G, H die sichtbaren Ecken der oberen Fläche, (A) (B) (F) (E) die von ihnen verdeckten der unteren Fläche.

31) Dreht man den Würfel um die Kante AE, z. B. um 30^0, so werden die Grundrißpunkte nur horizontal verschoben, während die im übrigen unveränderte Aufrißfigur um 30^0 gedreht erscheint. In Fig. 138 ist dies an zweiter Stelle dargestellt. An dritter Stelle ist gezeigt, wie der Würfel erscheint, wenn die unverändert bleibende

Fig. 138.



Grundrißzeichnung z. B. um 35^0 gedreht wird, während die Aufrißpunkte von Nr. 2 sich horizontal verschieben. Endlich ist noch gezeigt, wie er erscheint, wenn der Aufriß von 3) um 20^0 gedreht wird und die Grundrißpunkte sich horizontal verschieben. So erhält man den Würfel in allgemeinster Lage im Grund- und Aufriß.

Auch hierzu vergleiche man die „Einführung".

Geht man von einer solchen Würfelprojektion aus ebenso, wie bei der in Teil I behandelten Schrägprojektion, zum Oktaeder, Tetraeder, Pyramidenwürfel, Rhombendodekaeder, Pentagondodekaeder, Ikosaeder u. s. w. über, so erhält man korrekte orthographisch-axonometrische Darstellungen dieser Körper. Statt die obigen Drehungen mit dem Würfel vorzunehmen, kann man sie mit seinem Achsenkreuze ausführen. In der allgemeinsten Lage haben die Achsen verschiedene Längen. Aus diesen erkennt man die für ihre Richtungen zu nehmenden Verkürzungsverhältnisse bezw. Maßstäbe. Daraus erklärt sich der Name „Axonometrie".

Digitized by Google

VI. Berechnungsübungen.

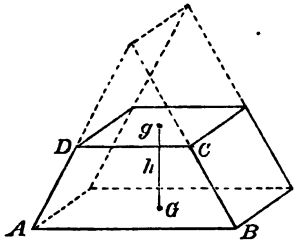
a) Körperstumpfe.

Unter Körperstumpf versteht man einen einfach gestalteten Körper, der von zwei parallelen Grundflächen G und g begrenzt ist.

32) Stumpf des Dachkörpers. Sind G und g die beiden Grundflächen, und ist h die Höhe, so ist der Inhalt

$$J = \frac{G+g}{2}h.$$

Fig. 139.

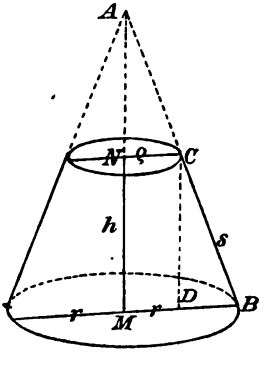


Der Beweis ergiebt sich mit Hülfe der Inhaltsformel des Trapezes $ABCD$, welches ebenfalls als Grundfläche benutzt werden kann.

Der mittlere Horizontalschnitt $\frac{G+g}{2}$ befindet sich in halber Höhe.

33) Stumpf des Kreiskegels. Fig. 140 stellt zunächst den Stumpf des senkrechten Kreiskegels dar, der andeutungsweise zum vollständigen Kegel ergänzt ist; r und ϱ seien die Grundradien, h die Höhe des Stumpfes, x die des ganzen Kegels. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke BCD und BAM folgt $(r-\varrho):h = r:x$, also $x = \frac{hr}{r-\varrho}$.

Fig. 140.



Der Stumpf ist gleich dem ganzen Kegel vermindert um den Ergänzungungskegel, also

$$J = \frac{r^2\pi x}{3} - \frac{\varrho^2\pi(x-h)}{3}$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[x(r^2-\varrho^2)+\varrho^2 h\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[\frac{hr}{r-\varrho}(r+\varrho)(r-\varrho)+\varrho^2 h\right],$$

also

1) $$J = \frac{\pi h}{3}\left[r^2 + r\varrho + \varrho^2\right].$$

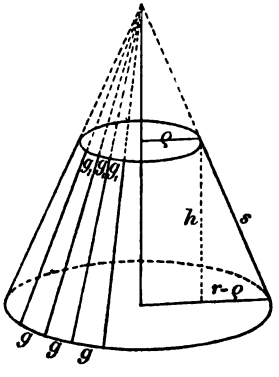
Bringt man π in die Klammer, so erhält man in dieser $r^2\pi = G$, $\varrho^2\pi = G_1$, $r\varrho\pi = \sqrt{(r^2\pi)(\varrho^2\pi)} = \sqrt{G\cdot G_1}$, wo G und G_1 die beiden Grundflächen sind. Man hat also die Inhaltsformel

2) $$J = \frac{h}{3}\left[G + \sqrt{G\,G_1} + G_1\right].$$

Digitized by Google

Der Mantel läßt sich in n schmale Trapeze mit den Grundlinien $\frac{2r\pi}{n} = g$ und $\frac{2\varrho\pi}{n} = g_1$ einteilen, von denen jedes die Höhe s, also die Fläche $\frac{g+g_1}{2}\,s = \frac{\pi}{n}(r+\varrho)\,s$ hat. Der Mantel des Stumpfes hat also die Fläche

Fig. 141.



3) $$M = (r+\varrho)\pi s.$$

Statt s kann gesetzt werden

$$s = \sqrt{(r-\varrho)^2 + h^2}.$$

34) **Aufgabe.** In welcher Höhe befindet sich die mittlere Querschnittsfläche des Kegelstumpfes?

Auflösung. Ist ihr Radius gleich z, so müßte sein: Inhalt = mittlerer Schnitt mal Höhe, also

$$J = z^2\pi h = \frac{\pi h}{3}\left[r^2 + r\varrho + \varrho^2\right],$$

also $z = \sqrt{\frac{r^2 + r\varrho + \varrho^2}{3}}$. Um die Höhe y zu finden, in der sich dieser Radius z befindet, benutze man die aus der Ähnlichkeit der Dreiecke in Fig. 142 folgende Proportion

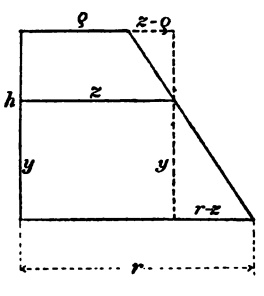
$$(r-z) : y = (z-\varrho) : (h-y),$$

woraus folgt

$$y = \frac{h(r-z)}{r-\varrho},$$

wo der Wert von z einzusetzen ist. (Der mittlere Querschnitt befindet sich also nicht etwa in halber Höhe.)

Fig. 142.



Bemerkung. Die Inhaltsformel (nicht aber die Mantelformel) gilt nach dem Satze des Cavalieri auch für den Stumpf des schiefen Kreiskegels.

35) Pyramidenstumpf. Nach Teil I, Ster. Nr. 26) haben Kegel und Pyramiden von gleichem Grund und gleicher Höhe in demselben Niveau gleiche Horizontalschnitte. Haben also Kegel- und Pyramidenstumpf gleiche Grundflächen G und g und dieselbe Höhe h, so haben die ergänzten Körper dieselbe Höhe x. Demnach sind auch die

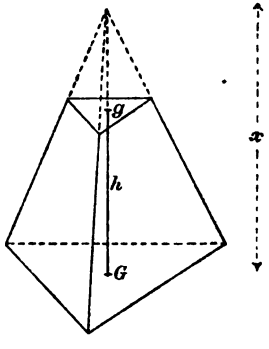
Digitized by Google

Stumpfe nach Cavalieri inhaltsgleich. Folglich ist auch für den Pyramidenstumpf

$$J = \frac{h}{3}\left[G + \sqrt{Gg} + g\right].$$

Selbständig ergiebt sich dies folgendermaßen: Der Parallelschnitt in Fig. 143 schneidet einen der ganzen Pyramide ähnlichen Körper ab, folglich ist

Fig. 143.



$$G : g = x^2 : (x - h)^2,$$

denn in ähnlichen Körpern verhalten sich homologe Flächen wie die Quadrate homologer Linien. Daraus folgt

$$\sqrt{G} : \sqrt{g} = x : (x - h)$$

und

$$x = \frac{h\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$$

Setzt man dies in

$$J = \frac{Gx}{3} - \frac{g(x-h)}{3} = \frac{1}{3}\left[x(G - g) + gh\right]$$

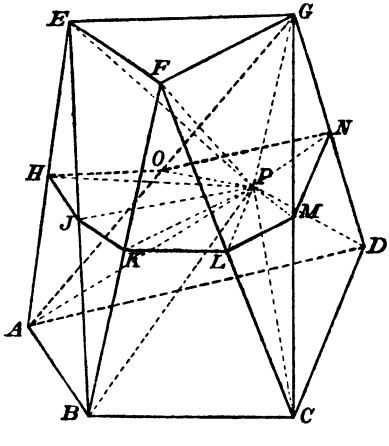
ein, so entsteht

$$J = \frac{1}{3}\left[\frac{h\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}(\sqrt{G} + \sqrt{g}) \cdot (\sqrt{G} - \sqrt{g}) + gh\right],$$

oder endlich

$$J = \frac{h}{3}\left[G + \sqrt{Gg} + g\right].$$

Fig. 144.



36) Ebenflächiges Prismatoid. Man versteht darunter einen Körper, dessen parallele Grundflächen Vielecke sind, während als Seitenflächen im allgemeinen nur Dreiecke auftreten, von denen jedoch zwei benachbarte zu einem ebenen Viereck zusammenfallen können, (sobald die obere und die untere Kante parallel sind).

In Fig. 144 ist als untere Grundfläche ein Viereck $ABCD$, als obere ein Dreieck EFG gewählt. Die Halbierungspunkte der

Digitized by Google

Seitenkanten liegen in einem Horizontalschnitte. Die untere Grundfläche U bezeichne man als Unterschnitt, die obere O als Oberschnitt, die in halber Höhe durchgelegte Fläche M als Mittelschnitt, der hier $4 + 3 = 7$ Seiten hat, im allgemeinen $m + n$ Seiten haben kann.

Ein beliebiger Punkt P des Mittelschnitts werde mit allen Ecken der drei Schnitte verbunden. Dann erhält man folgende Körper und Körperinhalte:

$$\text{Pyramide } P(EFG) = \frac{h}{2}\frac{O}{3} = \frac{hO}{6},$$

$$\text{„ } P(ABCD) = \frac{h}{2}\frac{U}{3} = \frac{hU}{6},$$

$$\text{„ } P(ABE) = 4 \cdot \text{Pyramide } P(HJE)$$
$$= 4 \cdot \text{Pyramide } E(HJP) = 4 \cdot HJP \cdot \frac{h}{6},$$

$$\text{„ } P(BEF) = 4 \cdot \text{Pyramide } P(JKP)$$
$$= 4 \cdot \text{Pyramide } B(JKP) = 4 \cdot JKP \cdot \frac{h}{6}.$$

Ebenso folgt noch $4\,KLP \cdot \frac{h}{6}$, $4\,LMP \cdot \frac{h}{6}$, $4\,MNP\frac{h}{6}$, $4\,NOP\frac{h}{6}$ und $4\,OPH\frac{h}{6}$. Dabei geben die den Faktor 4 enthaltenden Inhalte zusammengenommen den Mittelschnitt M multipliziert mit $\frac{4h}{6}$. Der ganze Körper hat also den Inhalt

$$J = \frac{h}{6}[U + O + 4M].$$

Er hat diese Inhaltsformel, die Newton-Simpsonsche Formel, mit zahlreichen anderen Körpern gemein, so daß das ebenflächige Prismatoid nur ein spezieller Fall eines weit allgemeineren Körpers ist.

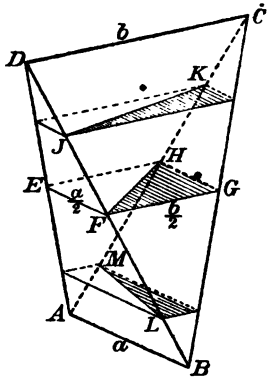
Spezielle Fälle des Prismatoids sind das Prisma, der Dachkörper, bei dem die eine Grundfläche Null ist, die Pyramide und der Kegel, bei denen dasselbe stattfindet und die Stumpfe der letztgenannten Körper. Von ihnen gilt also die genannte Inhaltsformel. Sie dient jedoch bei diesen nicht zur Berechnung, sondern zum Nachweis wichtiger Sätze.

[37) Das Halbtetraeder. Jedes beliebige Tetraeder (Fig. 145) kann mit der Kante a auf einen horizontalen Tisch gestellt und um diese Kante so gedreht werden, daß schließlich auch die Kante b horizontal ist. Dann ist der Körper der Spezialfall des Prismatoids, bei dem das obere und das untere Polygon zu geraden Linien geworden sind. Ist also $EFGH$ der horizontale Mittelschnitt M, und ist h der senkrechte Abstand der Kanten a und b, so ist der

Digitized by Google

Inhalt des Körpers $J = \frac{h}{6}[U + O + 4M]$, oder, da $U = 0$ und $O = 0$ ist, $J = \frac{2}{3}hM$. (Der Mittelschnitt ist ein Parallelogramm mit den Seiten $\frac{a}{2}$ und $\frac{b}{2}$, die denselben Winkel γ einschließen, unter dem sich die Geraden a und b kreuzen. Es ist also

Fig. 145.



$$M = \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} \sin\gamma$$

und

$$J = \tfrac{4}{6} h \frac{a}{2} \frac{b}{2} \sin\gamma = \frac{abh}{6} \sin\gamma.)$$

Zieht man nun zahlreiche Horizontalschnitte, so erkennt man, daß jeder ein Parallelogramm ist, welches durch die Diagonale JK bezw. FH, LM u. s. w. halbiert wird. Die Gesamtheit dieser Diagonalen giebt eine gekrümmte Fläche, das sogenannte windschiefe Viereck $ABCD$, dessen gerade Horizontalen der Reihe nach von DC in die Richtungen JK, FH, LM, BA übergehen. Nach dem Satze des Cavalieri wird das Tetraeder durch diese windschiefe Fläche in zwei inhaltsgleiche Körper geteilt, die sogenannten Halbtetraeder. Jedes derselben hat den Mittelschnitt $M_1 = \frac{M}{2}$ und den Inhalt $J = \frac{2}{3} h M_1$ $= \frac{h}{6}[U + O + 4M_1]$, wo $U = 0$ und $O = 0$ ist. Folglich: Das Halbtetraeder gehorcht der Newton-Simpsonschen Formel.

38) Das Prismatoid mit windschiefen Seitenflächen. Läßt man in dem ebenflächigen Prismatoid Fig. 144 an Stelle zweier benachbarter Seitendreiecke eine windschiefe Viereckfläche mit horizontalen Geraden treten, so schneidet man vom Gesamtkörper ein Halbtetraeder von der besprochenen Stellung ab. Ist der abgeschnittene Teil des Mittelschnitts M_1, so bleibt ein Körper übrig vom Inhalte

$$J = \frac{h}{6}(U + O + 4M) - \frac{4h}{6} M_1 = \frac{h}{6}[U + O + 4(M - M_1)],$$

wo $M - M_1$ der neue Mittelschnitt ist. Folglich gilt die Simpsonsche Regel auch weiter, wenn man an Stelle von beliebig vielen der benachbarten Dreieckspaare windschiefe Flächen der besprochenen Art treten läßt. Also:

Digitized by Google

Der Inhalt des Prismatoids mit (teilweise oder ausnahmslos) windschiefen Seitenflächen (die durch horizontale Geraden gebildet sind) ist

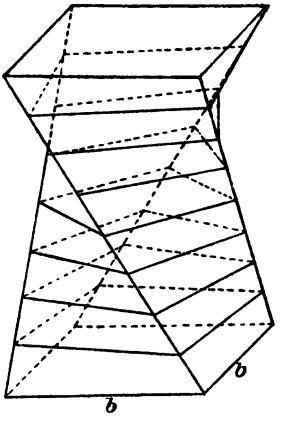
$$J = \frac{h}{6}(U + O + 4M).$$

39) Fig. 146 stellt den Spezialfall dar, bei dem die Grundflächen gleichliegende Quadrate sind. In diesem Falle ist der Mittelschnitt, wie man durch Herunterprojizieren erkennt, die Hälfte der Grundfläche b^2, also

$$J = \frac{h}{6}\left[b^2 + b^2 + 4\,\frac{b^2}{2}\right] = \frac{2}{3}b^2h,$$

d. h. $\frac{2}{3}$ des zugehörigen Prismas.

Fig. 146.



40) Sind die Grundflächen regelmäßige Polygone von unendlicher Seitenzahl, also Kreise, so entsteht das durch Fig. 115 dargestellte Drehungshyperboloid, dessen Inhalt also ebenfalls

$$J = \frac{h}{6}[U + O + 4M]$$

ist. Besonders einfach wird die Formel, wenn der Mittelschnitt diesen Körper, wie in der Figur, in zwei kongruente Teile zerlegt. Dann wird

$$J = \frac{h}{6}[U + U + 4M] = \frac{h}{3}[U + 2M].$$

Bemerkung. Aus dem bei dem windschiefen Prismatoid angewandten Verfahren ergiebt sich, daß, wenn die Newton-Simpson-Formel von zwei Körpern derselben Höhe gilt, sie auch von der Summe und Differenz dieser Körper gilt. Die Querschnittsflächen, die in derselben Höhe liegen, können dabei zu ganz beliebigen Gestalten vereinigt werden, sei es durch Addition oder durch Subtraktion.

41) **Übungsaufgaben.** Unter den Aufgaben über Körperstumpfe sind z. B. diejenigen von besonderem Interesse, bei denen es sich um das spezifische Gewicht p' in Verbindung mit dem wirklichen Gewichte p handelt. Dabei ist zunächst $p = Kp'$, wo K der Körperinhalt ist. Schwimmt ein Körper, und ist $W \cdot 1 = W$ das Gewicht und zugleich der verdrängte Wasserraum, so ist, da der Körper ebensoviel wiegt, wie W, $Kp' = W$, also $p' = \frac{W}{K}$ das spezifische Gewicht. Ist z. B.

Digitized by Google

letzteres gegeben, so kann man fragen, wie tief ein Cylinder oder Prisma, eine Pyramide, ein Kegel- oder Pyramidenstumpf, ein Prismatoid u. s. w. eintaucht, je nachdem das Eintauchen in diesem oder jenem Sinne erfolgt.

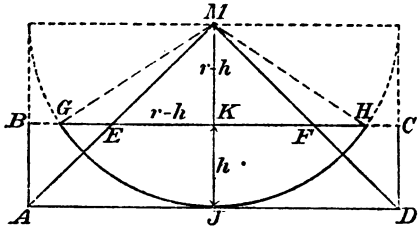
Ferner sind von Interesse Übungsaufgaben über Stumpfe, denen Kugeln um- oder einbeschrieben werden können.

Abstumpfungen kommen in der Kryſtallographie vielfach vor. So ist z. B. das an den Vierkant-Ecken abgestumpfte Rhombendodekaeder identisch mit dem abgekanteten Würfel, das an den Dreikant-Ecken abgestumpfte identisch mit dem abgekanteten Oktaeder. Zahlreiche Beispiele aus des Verfassers „Einführung in das stereometrische Zeichnen" geben Veranlassung zu Konstruktionen und Berechnungen.

b) Kugelberechnungen.

42) Kugelabschnitt (Kugelsegment). In Teil I, Ster. Nr. 27, wurde der Inhalt der Halbkugel gefunden durch Vergleich mit einem Cylinder von Radius r und Höhe r, aus dem der auf der Grundfläche stehende Kegel von Höhe r ausgeschnitten war. Der Restkörper hatte dabei in gleicher Höhe gleiche Querschnittsfläche mit der Kugel. Von der Figur ist hier nur der Aufriß gezeichnet. Nach dem Satze von Cavalieri muß ähnlich, wie dort, der Kugelabschnitt GJH denselben Inhalt haben, wie der entsprechende Restkörper, d. h. wie Cylinder $ABCD$ — Kegelstumpf $AEFD$. Also, wenn $AB = h$, also $EK = MK = r - h$ gesetzt wird,

Fig. 147.



$$\text{Segment} = r^2\pi h - \frac{\pi h}{3}[r^2 + r(r-h) + (r-h)^2].$$

$$= \frac{\pi h}{3}[3r^2 - r^2 - r(r-h) - (r-h)^2],$$

oder

$$\text{Segment} = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h).$$

43) Kugelsektor. Setzt man auf das Kugelsegment GHJ den Kegel GHM auf, so erhält man den Kugelausschnitt oder Kugelsektor, der zur Segmenthöhe h gehört. Sein Inhalt ist

Digitized by Google

$$\text{Segment} + \text{Kegel} = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h) + \frac{\pi \overline{GK}^2}{3}(r - h)$$

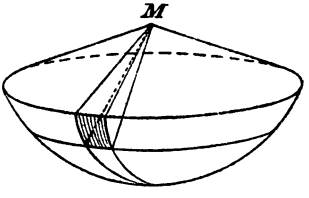
$$= \frac{\pi}{3}(3rh^2 - h^3) + \frac{\pi}{3}[r^2 - (r - h)^2](r - h),$$

wo sich alles, bis auf $\frac{2}{3} r^3 \pi h$ weghebt. Also

$$\text{Sektor} = \frac{2}{3} r^3 \pi h.$$

44) Kugelkalotte. Die Wölbungsfläche des Segmentes heißt Kugelhaube (Kugelkappe oder Kalotte). Zu ihrer Berechnung schlägt man dasselbe Verfahren ein, wie in Teil I, Ster. 38. Man teilt die Wölbungsfläche z. B. durch Parallelkreise und Meridiane in kleine „quadratische" Flächen G_1, G_2, G_3, ... ein, deren Ecken mit dem Kugelcentrum verbunden werden. So entstehen Pyramiden von der Höhe r und dem Inhalte $G_1 \frac{r}{3}$, $G_2 \frac{r}{3}$, $G_3 \frac{r}{3}$, u. s. w. Dann ist

Fig. 148.



$$\text{Sektor} = \text{Summe der Pyramiden} = \frac{r}{3}(G_1 + G_2 + G_3 + \cdots),$$

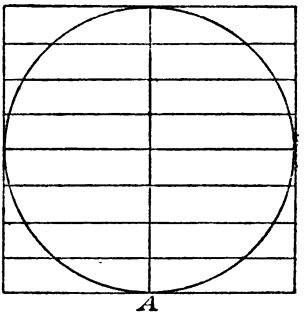
oder $\text{Sektor} = \frac{r}{3} \cdot \text{Kalotte}$, also $\text{Kalotte} = \frac{3 \cdot \text{Sektor}}{r} = \frac{3}{r}\frac{2}{3} r^3 \pi h$, oder

$$\text{Kalotte} = 2r\pi h.$$

Genau ebenso groß ist in Fig. 147 der Mantel des der ganzen Kugel umbeschriebenen Cylinders von der Grundfläche bis zur Höhe h.

45) Zonenfläche. Zwei Parallelkreise schneiden aus der Kugelfläche eine Zonenfläche aus, die demnach als Differenz zweier Kalotten betrachtet werden kann. Gehört zur einen die „Pfeilhöhe" h_1, zur anderen die Pfeilhöhe h_2, so erhält man

Fig. 149.



$$\text{Zonenfläche} = 2r\pi h_1 - 2r\pi h_2$$

$$= 2r\pi(h_1 - h_2).$$

Setzt man die senkrechte Höhendifferenz $h_1 - h_2 = h$, so erhält man

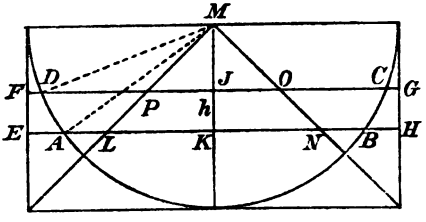
$$\text{Zonenfläche} = 2r\pi h.$$

In der Aufrißzeichnung Fig. 149 ist also jede Zonenfläche gleich der gleich hohen Schicht des Cylindermantels. Ist also der Durch-

Digitized by Google

messer AB in n gleiche Teile geteilt, so wird durch die Normalebenen in den Teilpunkten die Kugelfläche in flächengleiche Zonen zerlegt. Projiziert man also die Länder der Erdoberfläche normal auf den Berührungscylinder des Äquators, so erhält man eine flächentreue Weltkarte, die nach Aufschneiden des Cylinders ein Rechteck in der Ebene giebt (äquivalente Abbildung nach Lambert).

Fig. 150.



46) Kugelschicht. Die durch zwei Horizontalschnitte aus dem Kugelkörper geschnittene Schicht $ABCD$ ist gleich dem Cylinder $EHGF$ vermindert um den Kegelstumpf $LNOP$. Ist nun die senkrechte Höhe $KJ = h$, Radius $JD = a$ und Radius $KA = b$, so hat man:

$$\text{Schicht} = r^2\pi h - \frac{\pi h}{3}\left[KL^2 + KL \cdot JP + JP^2\right]$$

$$= r^2\pi h - \frac{\pi h}{3}\left[MK^2 + MK \cdot MJ + MJ^2\right]$$

$$= r^2\pi h - \frac{\pi h}{6}\left[2\,MK^2 + 2\,MK \cdot MJ + 2\,MJ^2\right]$$

$$= r^2\pi h - \frac{\pi h}{6}\left[3\,MK^2 + 3\,MJ^2 - (MK - MJ)^2\right].$$

Nun ist aber $MK^2 = MA^2 - KA^2 = r^2 - b^2$, und $MJ^2 = MD^2 - JD^2 = r^2 - a^2$ und $MK - MJ = h$, also hat man

$$\text{Schicht} = \frac{6}{6}r^2\pi h - \frac{\pi h}{6}\left[3\,(r^2 - b^2) + 3\,(r^2 - a^2) - h^2\right]$$

$$= \frac{\pi h}{6}\left[6\,r^2 - 3\,(r^2 - b^2) - 3\,(r^2 - a^2) + h)^2\right],$$

oder endlich

$$\text{Kugelschicht} = \frac{\pi h}{6}\left[3\,a^2 + 3\,b^2 + h^2\right].$$

Setzt man $b = 0$, so erhält man eine neue Formel für das Segment, nämlich

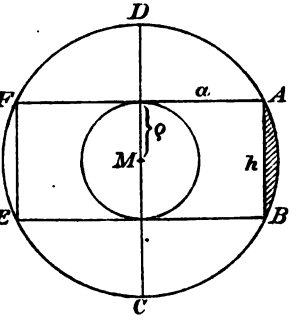
$$\text{Kugelsegment} = \frac{\pi h}{6}\left[3\,a^2 + h^2\right],$$

die gegen die frühere den Vorzug hat, daß a und h am Segment gemessen werden können, während dort zwar h, aber nicht r meßbar war, sondern berechnet werden mußte.

Digitized by Google

Bemerkung. Die Formeln für das Segment, den Sektor und die Schicht sind hier zwar nur an der Halbkugel bewiesen, gelten aber, wie ganz einfache Betrachtungen zeigen, auch dann, wenn die Kugelteile über den größten Kreis der Kugel hinausreichen.

Fig. 151.



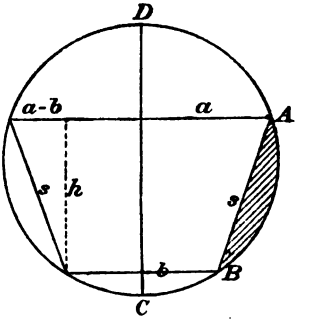
47) **Aufgabe.** Den Inhalt des Rotationskörpers zu berechnen, der durch Drehung des durch die Sehne AB abgeschnittenen Kreissegments um die parallele Achse CD entsteht.

Auflösung. Kugelschicht $ABEF$ — Cylinder $ABEF$

$$= \frac{\pi h}{6}\left[3a^2 + 3a^2 + h^2\right] - \frac{6a^2\pi h}{6} = \frac{\pi h}{6}\left[6a^2 + h^2 - 6a^2\right] = \frac{\pi h^3}{6},$$

oder, wenn man $\varrho = \frac{h}{2}$ einführt, $\frac{4}{3}\varrho^3\pi$. Der durch Rotation des Segments entstandene Körper ist also **inhaltsgleich mit einer Kugel vom Radius** $\frac{h}{2}$. Der Inhalt ist also nur abhängig von h, nicht aber vom Kugelradius r. (Je größer r, desto kleiner zwar das Kreissegment für dasselbe h, desto größer aber der Drehungsweg. Beides gleicht sich aus.)

Fig. 152.



48) **Aufgabe.** Den entsprechenden Körper für den Fall zu berechnen, daß das Kreissegment um einen Durchmesser gedreht wird, der nicht parallel zur Sehne ist.

Auflösung. Schicht — Kegelstumpf $= \frac{\pi h}{6}\left[3a^2 + 3b^2 + h^2\right]$

$$-\frac{\pi h}{3}\left[a^2 + ab + b^2\right] = \frac{\pi h}{6}\left[3a^2 + 3b^2 + h^2\right] - \frac{\pi h}{6}\left[2a^2 + 2ab + 2b^2\right]$$

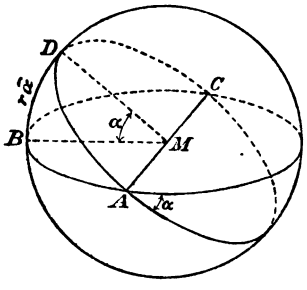
$$= \frac{\pi h}{6}\left[a^2 + b^2 - 2ab + h^2\right] = \frac{\pi h}{6}\left[(a-b)^2 + h^2\right].$$ Da aber $(a-b)^2 + h^2 = s^2$ ist, so folgt wiederum $J = \frac{\pi h}{6}s^2$.

Ganz allgemein folgt also der Satz: **Rotiert ein Kreissegment um einen beliebigen Durchmesser, so ist der Inhalt des ent-**

Digitized by Google

stehenden Drehungskörpers das $\frac{h}{s}$-fache einer Kugel, deren Durchmesser gleich der Sehne des Segmentes ist.

Fig. 153.



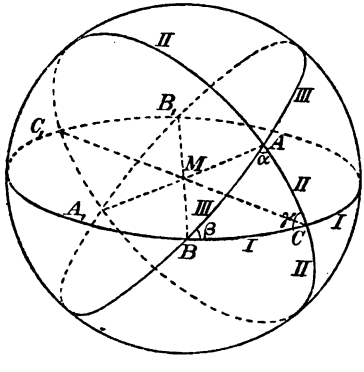
[49) Fläche und Körper des Kugelzweiecks.*) In Fig. 153 ist von der Kugelfläche durch die größten Kreise ABC und ADC ein Zweieck mit den Ecken A und C ausgeschnitten. Seine Fläche folgt aus der Proportion $F : O = \alpha^0 : 360^0$, also $F = O\,\frac{\alpha^0}{360^0}$, wo $O = 4r^2\pi$ die Oberfläche der Kugel ist.

Ist dagegen der Bogen $BD = r\hat{\alpha}$ in Längeneinheiten bestimmt, so ist $F = O\,\frac{\hat{\alpha}}{2\pi}$.

Aus $F = 4r^2\pi\,\frac{\hat{\alpha}}{2\pi} = 2r \cdot (r\hat{\alpha}) = d \cdot \widehat{BD}$ folgt, daß die Fläche des Kugelzweiecks gleich einem Rechteck aus dem Durchmesser und dem symmetrisch teilenden Bogen ist.

Der Körper des Kugelzweiecks ist $K = J\,\frac{\alpha^0}{360^0} = J\,\frac{\hat{\alpha}}{2\pi} = \frac{4}{3}r^3\pi\,\frac{\hat{\alpha}}{2\pi}$ $= (2r)^2\,\frac{\hat{\alpha}r}{6} = \frac{d^2(r\hat{\alpha})}{6}$, also gleich dem 6ten Teile eines Prismas, dessen Grundfläche das Quadrat des Durchmessers, dessen Höhe der symmetrisch teilende Bogen ist.

Fig. 154.



50) Fläche und Körper des Kugeldreiecks. In Fig. 154 ist durch die größten Kreise I, II und III, die sich unter den Durchmessern AA_1, BB_1 und CC_1 schneiden, ein Kugeldreieck ABC mit den Winkeln α, β, γ gebildet, dessen Fläche, wenn man die Zweiecke mit Z_α, Z_β, Z_γ bezeichnet, folgendermaßen gefunden werden kann: $Z_\alpha + Z_\beta + Z_\gamma = (ABC + A_1BC) + (BCA + B_1CA) + (CAB + C_1AB)^{**}) = (ABC + A_1BC + B_1CA) + 2\,ABC + C_1AB$. Der erste Posten ist die Fläche der durch den Kreis III abgeschnittenen

*) Auf dem Gymnasium sind die Abschnitte 49 bis 51 zu überschlagen.
**) Achte auf die cyklischen Vertauschungen.

Digitized by Google

Halbkugel $\frac{O}{2}$ vermindert um das Dreieck CA_1B_1, welches als Scheiteldreieck symmetrisch und flächengleich mit C_1AB ist. Also hat man die Gleichung $\left(\frac{O}{2} - C_1AB\right) + 2ABC + C_1AB = Z_\alpha + Z_\beta + Z_\gamma$, oder $\frac{O}{2} + 2ABC = O\frac{\alpha^0}{360^0} + O\frac{\beta^0}{360^0} + O\frac{\gamma^0}{360^0}$, d. h. Kugeldreieck $ABC = \frac{\alpha^0+\beta^0+\gamma^0-180^0}{720^0}O$

$= \frac{\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}+\widehat{\gamma}-\pi}{4\pi}O = (\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}+\widehat{\gamma}-\pi)r^2 = (r\widehat{\alpha}+r\widehat{\beta}+r\widehat{\gamma}-r\pi)r.$

Hier bedeutet $O = 4r^2\pi$ die Kugeloberfläche, während $r\widehat{\alpha}$, $r\widehat{\beta}$ und $r\widehat{\gamma}$ die symmetrisch teilenden Kreisbogen der einzelnen Kugelzweiecke sind. Nennt man $\alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 - 180^0$ den Winkelüberschuß des Kugeldreiecks (über 180^0) und $r\widehat{\alpha} + r\widehat{\beta} + r\widehat{\gamma} - r\pi$ den Bogenüberschuß der entsprechenden Zweiecke (über den Halbkreisbogen), so ergiebt sich Folgendes: Die Fläche des Kugeldreiecks ist proportional dem Quadrate des Radius und proportional dem Winkelüberschusse; sie ist gleich einem Kugelzweieck, dessen Winkel der halbe Winkelüberschuß ist und gleich dem Rechteck aus dem Radius und dem Bogenüberschusse der drei Zweiecke.

Handelt es sich um gleichseitige Kugeldreiecke, so daß der Inhalt wird $\frac{3\alpha^0 - 180^0}{720^0}O$ oder $\frac{\alpha^0 - 60^0}{240^0}O$, und setzt man dies der Reihe nach gleich $\frac{1}{4}O$, $\frac{1}{8}O$ und $\frac{1}{20}O$, so folgt $\alpha = 120^0$ bezw. $\alpha = 90^0$, $\alpha = 72^0$, und die Ecken sind der Reihe nach die Sektoren des regelmäßigen Tetraeders, Oktaeders, Ikosaeders, deren Hauptschnitte Kreise geben, die sich unter den gefundenen Winkeln schneiden.

Stellt man die entsprechenden Formeln für das Kugelviereck und Kugelfünfeck auf, so kommt man durch ähnliche Spezialisierung auf den Fall des Würfels und des Pentagondodekaeders. Es handelt sich also um Probleme der Kugelteilung.

51) Verbindet man die Ecken des Kugeldreiecks mit dem Kugelcentrum, so erhält man den Körper des Kugeldreiecks, dessen Inhalt man aus der Fläche durch Multiplikation mit $\frac{r}{3}$ erhält (Pyramidenformel), so daß man hat:

$$K = \frac{\alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 - 180^0}{720^0}\frac{4}{3}r^3\pi = \frac{\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}+\widehat{\gamma}-\pi}{4\pi}\frac{4}{3}r^3\pi$$

$$= \left(\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}+\widehat{\gamma}-\pi\right)\frac{r^3}{3} = \left(r\widehat{\alpha}+r\widehat{\beta}+r\widehat{\gamma}-r\pi\right)\frac{r^2}{3}$$

oder, wenn J den Kugelinhalt bedeutet,

$$K = \frac{\alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 - 180^0}{720^0}J = \frac{\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}+\widehat{\gamma}-\pi}{4\pi}J.$$

Digitized by Google

[Auch diese Formeln sind leicht in Worte zu kleiden. Bei der einen handelt es sich um den Inhalt einer Pyramide über r^2, deren Höhe der Bogenüberschuß der drei Zweiecke ist.]

c) Übungsaufgaben.

52) Unter den Übungsaufgaben sind die mit der mathematischen Geographie zusammenhängenden die wichtigsten; z. B.: Wie groß ist die Fläche der heißen, der beiden gemäßigten, der beiden kalten Zonen, und in welchem Verhältnisse stehen sie? Wie groß ist die Zonenfläche zwischen dem Äquator und dem ersten Grade nördlicher Breite; wie groß die vom 45ten und 46ten Grade nördlicher Breite eingeschlossene Zone? Wie groß ist jedes Meridianzweieck von Grad zu Grad? Wie viele Quadratmeilen Meeresfläche übersieht man von 10 m, 100 m, 1000 m, 10 000 m, 100 000 m Meereshöhe? Eine wie große Fläche wird durch ein Meteor beleuchtet, welches sich 8 Meilen über der Erdoberfläche befindet? Wie hoch muß ein Meteor schweben, um 1000 Quadratmeilen Erdoberfläche zu beleuchten? Der Erschütterungskreis eines Erdbebens reiche von 10^0 nördlicher Breite bis 60^0 nördlicher Breite; wie viele Quadratmeilen umfaßt er, und der wievielte Teil der Erdoberfläche wird erschüttert? Den wievielten Teil der Erdoberfläche schließt der 45te Breitegrad ein? Welcher Parallelkreis schließt den vierten Teil der Erdoberfläche ein (d. h. um welchen Grad nördlicher Breite handelt es sich)? Die Fläche der scheinbaren Himmelskugel ist wieviel mal so groß, als die scheinbare Fläche der Sonne (deren scheinbarer Durchmesser 32′ beträgt)? Der wievielte Teil der Sonnenausstrahlung kommt der Erde zu gute? (Es ist zu untersuchen, wieviel mal so groß die scheinbare Himmelskugel ist, als die scheinbare Fläche der Erde für den Sonnenbewohner. Die Erde habe dabei den Durchmesser 1720 Meilen, und die Entfernung von der Sonne betrage 20 Millionen Meilen.) Wie groß ist die Fläche eines gleichseitigen Kugeldreiecks auf der Erde, wenn jeder seiner Winkel 70^0 beträgt? Wie viele Tonnenmassen enthält der Erdkörper, wenn sein specifisches Gewicht 5,6 ist? (Unter Tonnenmasse soll hier eine Masse verstanden werden, die an der Erdoberfläche 1000 kg wiegt. Nach dem Gewichte wird deshalb nicht gefragt, weil die Erde nicht an ihrer eigenen Oberfläche gewogen werden kann, weil ferner die Masse unveränderlich, das Gewicht aber von der Lage, Gestalt und Massenverteilung des anziehenden und angezogenen Körpers abhängig ist.) Wie viel Tonnen würde der nach der Sonnenoberfläche versetzte Erdkörper wiegen, wenn

Digitized by Google

dort die Anziehung 28 mal so groß ist, als auf der Erde? Für die Bewohner des 50ten Grades nördlicher Breite gehen die bis zu 50^0 vom Polarstern entfernten Gestirne nie unter (Circumpolarsterne), die bis zu 50^0 vom Südpol entfernten gehen nie auf. Den wievielten Teil des gestirnten Himmels lernen diese Bewohner nur kennen? Angenommen, bei der Fluterscheinung steige der vierte Teil des Oceans (die eine Flutwelle) durchschnittlich um $\frac{1}{2}$ m, wie viele Kubikmeilen Wasser würde die Flutwelle enthalten? (Wie viele Meterkilogramme oder Metertonnen Arbeit bedeutet eine solche Steigung?)

Aufgaben über die den regelmäßigen Körpern um- und einbeschriebenen Kugeln befinden sich schon in Teil I. Sie können hier ergänzt werden. Aufgaben über Kugeln, die Kegeln und regelmäßigen Pyramiden einbeschrieben sind, ebenso über gewisse Kugelreihen, befinden sich in dem Kapitel über geometrische Reihen.

Umbeschriebene Körper. Einer Kugel einen Kegel umzubeschreiben, der den n-fachen Inhalt oder die n-fache Oberfläche hat als die erstere. Dieselbe Aufgabe für die 3-, 4-seitige Pyramide. Auch Kegelstumpfe und Pyramidenstumpfe können umbeschrieben werden, die gewissen Forderungen entsprechen.

Aus dem Radius der Kugel die Elemente sämtlicher einbeschriebenen bezw. umbeschriebenen regelmäßigen Polyeder zu berechnen. (Die Resultate befinden sich in zahlreichen Übungsbüchern.)

Aufgaben wie folgende: Wie groß muß die Segmenthöhe sein, damit der n^{te} Teil vom Kugelkörper abgeschnitten werde, führen auf Gleichungen 3ten Grades.

Specifisches Gewicht. Eine Kugel sinke bis zur Tiefe h ins Wasser ein. Wie groß ist ihr specifisches Gewicht. Auflösung

$$p' = \frac{W}{K} = \frac{\frac{\pi h^2}{3}(3r - h)}{\frac{4}{3}r^3\pi} = \frac{h^2(3r - h)}{4r^3}.$$

Dieselbe Aufgabe für die Hohlkugel von Radius r und r_1. Wie groß muß die Wandstärke einer gußeisernen Halbkugel von 1 m Durchmesser ($p' = 7{,}5$) genommen werden, damit sie bis zum 4ten Teile des Durchmessers, zur Hälfte, zu Dreiviertel desselben, oder ganz untertaucht? Statt der Kugel nehme man die Halbkugel, das Kugelsegment, die Kugelschicht, die beiden ersten lasse man erst mit der Wölbung voran, dann mit der Ebene voran eintauchen. Auch Segmente von Hohlkugeln können genommen werden. (Die Frage nach der Tiefe des Eintauchens führt auf Gleichungen dritten Grades.)

Digitized by Google

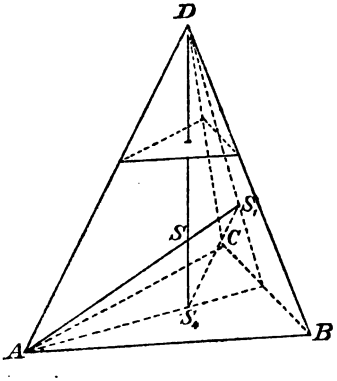
VII. Der Schwerpunkt, die Guldinschen Regeln, und die Sätze über abgeschrägte Körper.

53) Geometrisch und mit Hülfe der Mechanik (Gesetz der statischen Momente) kann bewiesen werden, daß der Schwerpunkt eines homogenen Punktsystems im Raume der Punkt mittleren Abstandes von jeder beliebigen Ebene ist; daß speciell der Schwerpunkt eines ebenen Punktsystems der Punkt mittleren Abstandes von jeder Geraden der Ebene ist*). Unter statischem Moment eines Punktsystems (Punkt als sehr kleiner Raumteil aufzufassen) in Bezug auf eine Ebene versteht man die Summe der Produkte aus jedem Punkte und seinem Abstande von der Ebene. Diese Summe ist gleich dem Produkte aus dem Schwerpunktsabstande des Körpers und seinem Inhalte. Ist nur von ebenen Gebilden die Rede, so handelt es sich in der Regel um die Abstände von einer Geraden.

Bei zahlreichen Körpern findet man den Schwerpunkt durch einfache geometrische Überlegungen, bei anderen mit Hülfe des Satzes, daß die Summe der einzelnen statischen Momente gleich dem Momente des gesamten Körpers ist. Auch andere Methoden der Schwerpunktsbestimmung sollen zur Sprache kommen, z. B. wird der Satz von Cavalieri zu Hülfe genommen.

Bei jedem (homogenen) regelmäßigen Körper liegt der Schwerpunkt im Mittelpunkte. Bei jedem senkrechten oder schrägen Prisma und Cylinder liegt er im Halbierungspunkte der Mittellinie.

Fig. 155.



54) **Aufgabe.** Den Schwerpunkt der dreiseitigen Pyramide zu finden.

Auflösung. Alle ebenen Parallelschichten zur Grundfläche haben den Schwerpunkt auf der durch ihn im Verhältnis 1 : 2 geteilten Mittellinie des Dreiecks. Diese Punkte liegen sämtlich auf DS_4. Auf dieser Geraden muß also der Schwerpunkt des Körpers liegen. Ebenso muß er auf AS_1, BS_2, CS_3 liegen. Die vier Mittellinien der Pyramide schneiden sich also in einem Punkte. Von jeder ist durch den Schwer-

*) Vgl. Seite 84.

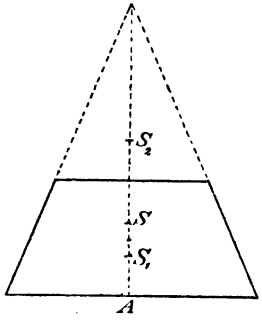
Digitized by Google

punkt S der 4te Teil abgeschnitten, denn $\triangle ASD \sim \triangle S_1 S S_4$, und die Dimensionen beider Dreiecke verhalten sich wie 1 : 3. Der Schwerpunkt der dreiseitigen Pyramide schneidet also von jeder Mittellinie den 4ten Teil ab, und seine Höhe ist der 4te Teil der Pyramidenhöhe.

Diese Höhenbestimmung gilt nach Cavalieri von allen Pyramiden und allen zur Pyramide gehörigen Körpern, z. B. von den Kegeln.

55) **Aufgabe.** Den Schwerpunkt des Kegelstumpfs zu finden, wenn r, ϱ und h gegeben sind.

Fig. 156.



Auflösung. Der ergänzte Kegel hat die Höhe $x = \frac{hr}{r-\varrho}$, also liegt S_2 in der Höhe $h + \frac{x-h}{4} = \frac{3h+x}{4}$, S in der Höhe $\frac{x}{4}$. Also ist nach dem Satze von den statischen Momenten:

$$AS_1 \cdot \text{Stumpf} + AS_2 \cdot (\text{kl. Kegel}) = AS \cdot (\text{ganzer Kegel}),$$

oder

$$y\left[\frac{\pi h}{3}(r^2 + r\varrho + \varrho^2)\right] + \frac{3h+x}{4}\left(\varrho^2\pi\frac{x-h}{3}\right) = \frac{x}{4} \cdot r^2\pi\frac{x}{3}.$$

Setzt man für x seinen Wert ein, so findet man schließlich für den Schwerpnnkt des Stumpfes die Höhe

$$y = \frac{h}{4}\,\frac{r^2 + 2r\varrho + 3\varrho^2}{r^2 + r\varrho + \varrho^2}.$$

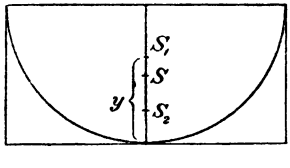
Für jeden Pyramidenstumpf ist, wie man nach Multiplikation des Zählers und Nenners mit π erkennt, die Schwerpunktshöhe

$$y = \frac{h}{4}\,\frac{G + 2\sqrt{Gg} + 3g}{G + \sqrt{Gg} + g},$$

wo G und g die beiden Grundflächen bedeuten.

56) **Aufgabe.** Den Schwerpunkt der Halbkugel bezw. des Restkörpers zu finden.

Fig. 157.



Auflösung. Wie vorher wird:

$y \cdot$ Restkörper $+ \frac{r}{4}$ Kegel $= \frac{r}{2}$ Cylinder,

oder

$$y \cdot \tfrac{2}{3}r^3\pi + \frac{r}{4} \cdot \frac{r^3\pi}{3} = \frac{r}{2} \cdot r^3\pi,$$

oder nach Hebung und Umformung $y = \frac{5}{8}r$.

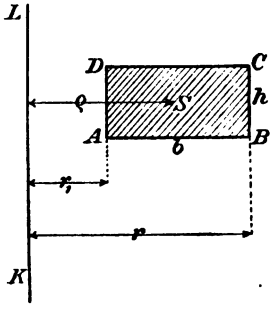
Digitized by Google

57) Die Guldinsche Regel für Drehungskörper.

Dreht man das Rechteck $ABCD$ in Fig. 158 um eine zu AD parallele Achse KL, so entsteht ein Hohlcylinder vom Inhalte

$$J = \pi(r^2 - r_1^2)h = \pi(r + r_1)(r - r_1)h = 2\pi\frac{r + r_1}{2}bh = 2\pi\varrho F,$$

Fig. 158.



wo F die Rechtecksfläche und ϱ ihr Schwerpunktsabstand von der Achse ist.

Besteht eine Fläche aus mehreren Rechtecken von solcher Lage, deren Flächen F_1, F_2, F_3 u. s. w., deren Schwerpunktsabstände ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 u. s. w. sind, so hat der ganze Drehungskörper den Inhalt

$$J = 2\varrho_1\pi F_1 + 2\varrho_2\pi F_2 + 2\varrho_3\pi F_3 + \cdots,$$

oder

$$J = 2\pi[\varrho_1 F_1 + \varrho_2 F_2 + \varrho_3 F_3 + \cdots].$$

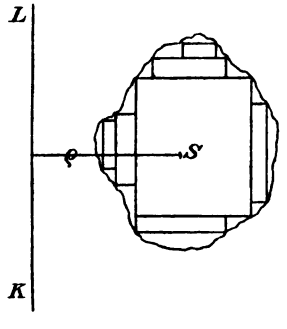
Ist nun $F = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots$ die Gesamtfläche und ϱ ihr Schwerpunktsabstand von der Achse, so ist nach dem Gesetz der statischen Momente

$$\varrho F = \varrho_1 F_1 + \varrho_2 F_2 + \varrho_3 F_3 + \cdots,$$

demnach ist der Inhalt des Drehungskörpers

$$J = 2\varrho\pi F = \text{Schwerpunktsweg mal Fläche.}$$

Fig. 159.



Da nun jede ebene Fläche mit Rechtecken, die man zuletzt kleiner und kleiner zu nehmen hat, mit beliebiger Genauigkeit vollständig ausgefüllt werden kann, so gilt die Formel überhaupt von jeder ebenen Fläche, die um eine sie nicht schneidende Achse ihrer Ebene rotiert. Der eigentliche Grund des Satzes beruht darin, daß S als Punkt mittleren Abstandes von der Achse KL den mittleren Drehungsweg zurücklegt, so daß der Körperinhalt ist: bewegte Fläche mal mittlerer Drehungsweg.

58) Die Guldinsche Regel für Drehungsflächen.

Wird die Gerade AB von Länge s um eine Achse KL derselben Ebene gedreht, so entsteht der Kegelmantel $M = (r + r_1)\pi s$

Digitized by Google

$= 2\frac{r + r_1}{2}\pi s = 2\varrho\pi s$, wo wiederum ϱ der Schwerpunktsabstand von der Achse ist.

Fig. 160.

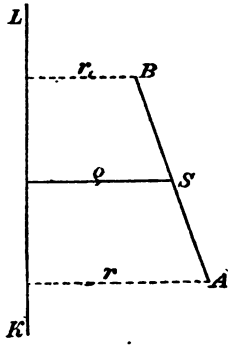
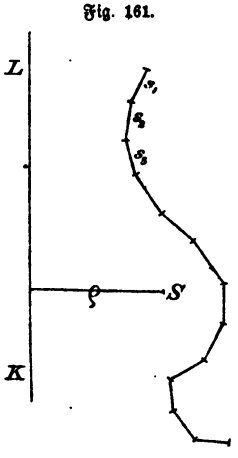


Fig. 161.



Rotiert eine Folge von geraden Linien derselben Ebene um eine Achse dieser Ebene, sind ferner $s_1, s_2, s_3, \ldots$ die Längen der Geraden, $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ ihre Schwerpunktsabstände von der Achse, so wird die Mantelfläche des Drehungskörpers

$$M = 2\varrho_1\pi s_1 + 2\varrho_2\pi s_2 + 2\varrho_3\pi s_3 + \cdots$$
$$= 2\pi[\varrho_1 s_1 + \varrho_2 s_2 + \varrho_3 s_3 + \cdots].$$

Nach dem Gesetz der statischen Momente ist aber die Klammer identisch mit ϱs, wo $s = s_1 + s_2 + s_3 \ldots$ die Länge des gesamten Linienzugs, ϱ sein Schwerpunktsabstand von der Achse ist, demnach ist die Mantelfläche

$M = 2\varrho\pi s =$ Schwerpunktsweg mal Länge des Linienzugs.

Handelt es sich um eine krumme Linie der Ebene, so gilt der Satz ebenfalls, denn man darf diese als eine Reihe kleiner gerader Linien betrachten.

Beispiel. Dreht sich ein Kreis mit Radius r um eine Gerade seiner Ebene im Abstande ϱ vom Mittelpunkte, die ihn nicht schneidet, so wird der Inhalt des entstehenden Ringkörpers $J = 2\varrho\pi r^2\pi = 2\varrho r^2\pi^2$, der Mantel (die Oberfläche) desselben wird $2\varrho\pi \cdot 2r\pi = 4\varrho r\pi^2$.

59) **Aufgabe.** Den Schwerpunkt der Halbkreisfläche zu finden.

Digitized by Google

Auflösung. Er liegt auf dem halbierenden Radius. Durch Drehung um den Durchmesser entsteht eine Kugel, für welche $2\varrho\pi F = J$ ist, so daß der Schwerpunktsabstand $\varrho = \frac{J}{2\pi F} = \frac{\frac{4}{3}r^3\pi}{2\pi\frac{r^2\pi}{2}} = \frac{4r}{3\pi}$ wird.

60) **Aufgabe.** Den Schwerpunkt des Halbkreisbogens zu finden.

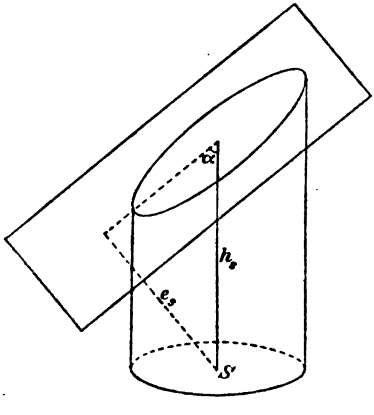
Auflösung. Ähnlich wie vorher entsteht eine Kugelfläche, für welche $2\varrho\pi s = M$ ist, so daß $\varrho = \frac{M}{2\pi s} = \frac{4r^2\pi}{2\pi \cdot r\pi} = \frac{2r}{\pi}$ wird.

Auch für Kreissegmente und Kreisbogen von beliebiger Größe kann man so den Schwerpunkt bestimmen.

61) Inhalt abgeschrägter Prismen und Cylinder.

Figur 162 stellt einen geraden, schräg abgeschnittenen Cylinder über ganz beliebiger Grundfläche dar. Zerlegt man letztere in sehr kleine Flächenteilchen $f_1, f_2, f_3, \ldots$, für welche die Cylinderhöhen sind $h_1, h_2, h_3, \ldots$, so sind die Inhalte der unendlich dünnen Einzelcylinder $f_1h_1 + f_2h_2 + f_3h_3 + \cdots =$ Grundfläche mal mittlere Höhe. Der Schwerpunkt der Grundfläche ist nun der Punkt mittleren Abstandes ihrer Punkte von der schrägen Schnittebene. Denkt man sich statt der Abstände die Parallelen $h_1, h_2, h_3, \ldots = \frac{e_1}{\sin\alpha}, \frac{e_2}{\sin\alpha}, \frac{e_3}{\sin\alpha}, \ldots$ gezogen, so ist ebenso das zum Schwerpunkte gehörige h_s das mittlere unter den verschiedenen h, denn jedes e ist mit demselben Faktor multipliziert. Folglich ist der Inhalt jedes abgeschrägten geraden Prismas und Cylinders

Fig. 162.



$$J = Gh_s,$$

wo G die Grundfläche, h_s die zu ihrem Schwerpunkte gehörige Höhe ist. [Dreht man die Figur um 90^0, so erhält man z. B. das Diagramm des seitlichen nach unten zunehmenden Wasserdrucks gegen die jetzt senkrechte Grundfläche des Cylinders oder Prismas. Der Druck

Digitized by Google

ist also Fläche mal Schwerpunktstiefe. Seine Resultante geht durch den schwerer zu berechnenden Schwerpunkt des zugehörigen Diagrammkörpers.]

62) Der Mantel abgeschrägter Cylinder und Prismen. Ist in Fig. 162 S der Schwerpunkt der Grundperipherie, so ist h_s' das Mittel unter den auf den Peripheriepunkten stehenden Höhen. Folglich ist der Mantel

$$M = uh_s',$$

wo u der Umfang der Grundperipherie, h_s die über ihrem Schwerpunkte stehende Cylinderhöhe ist.

Bemerkung. Der Schwerpunkt der schrägen Schnittfläche liegt allerdings stets senkrecht über dem Schwerpunkte der Grundfläche, der Schwerpunkt ihrer Peripherie aber liegt im allgemeinen nicht senkrecht über dem der Peripherie der Grundfläche. Den Grund von letzterem erkennt man daraus, daß, wenn man auf der schrägen Peripherie Punkte in gleichen Abständen markiert und sie nach unten projiziert, wegen der wechselnden Steilheit der Peripherie die Punkte in der Projektion ungleich verteilt liegen, wodurch die Schwerpunktslage beeinflußt wird. (Bei der Fläche dagegen ist die Steilheit überall dieselbe.)

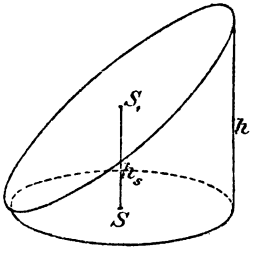
Sind die Prismen oder Cylinder oben und unten schräg abgeschnitten, so hat man einen Normalschnitt G zu führen und von seinem Schwerpunkte bezw. dem seiner Peripherie aus ein Lot zu ziehen. Ist dieses h_s bezw. h_s', so wird wiederum

$$J = G \cdot h_s, \quad M = u \cdot h_s'.$$

Beispiel. Für den in Fig. 163 dargestellten Cylinderhuf ist z. B.

$$J = r^2\pi h_s = r^2\pi\frac{h}{2}, \quad M = 2r\pi h_s = r\pi h.$$

Fig. 163.



Hier fallen die beiden Schwerpunkte S und S' zusammen. Dies würde bei dem Hufe über dem bloßen Halbkreise nicht der Fall sein, da der Schwerpunkt der Halbkreisfläche anders liegt, als der Schwerpunkt des Halbkreisbogens und Durchmessers (beide als eine Linie betrachtet).

Digitized by Google

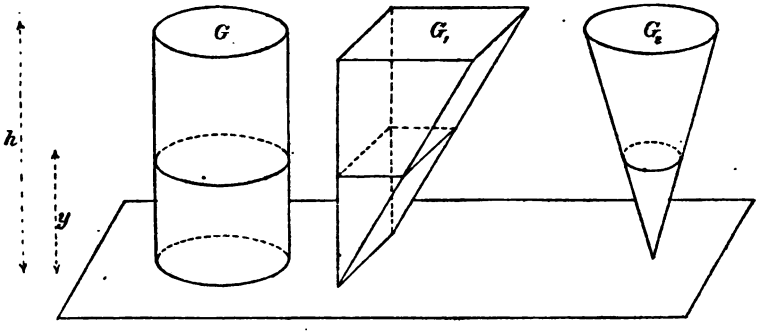
VIII. Die Newton-Simpsonsche Regel und die Summenformel.*)

63) Erste Ableitung. Für das Prismatoid und seine Spezialfälle, Prisma, Dachkörper und Pyramide (Kegel) galt die Inhaltsformel

$$J = \frac{h}{6}[U + O + 4M].$$

In Fig. 164 sind die letzteren Körper auf die Spitze gestellt.

Fig. 164.



Legt man die drei Querschnitte für jedes Niveau addierend oder (teilweise) subtrahierend als irgendwie gestalteten Querschnitt zusammen, so daß der neue Querschnitt $q = q_1 \pm q_2 \pm q_3$ wird, so gilt nach früherer Bemerkung die Simpson-Regel auch für den neu entstandenen Körper.

Sind z. B. die Grundflächen der Körper G, G_1 und G_2, so sind die Schnitte in der Höhe y der Reihe nach G, $G_1\frac{y}{h}$, $G_2\frac{y^2}{h^2}$, und wenn z. B. alles addiert würde, so hätte der neue Körper den Querschnitt

$$q_y = G + G_1\frac{y}{h} + G_2\frac{y^2}{h^2},$$

oder, wenn man für die Faktoren von y^0, y^1 und y^2 die Zahlen a, b und c einführt,

1) $$q_y = a + by + cy^2.$$

Es soll durch wirkliche Rechnung geprobt werden, ob für einen solchen Körper die Regel gilt.

*) Abschnitt VIII kann auf dem Gymnasium überschlagen werden.

Digitized by Google

Der Schnitt in Höhe $y = 0$ ist $U = q_0 = a + b \cdot 0 + c \cdot 0^2 = a$,

" " " " $y = \frac{h}{2}$ " $M = q_{\frac{h}{2}} = a + b\frac{h}{2} + c \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2$

$= a + \frac{bh}{2} + \frac{ch^2}{4}$.

" " " " $y = h$ " $O = q_h = a + bh + ch^2$.

Demnach ist

$$\frac{h}{6}\left[U + O + 4M\right] = \frac{h}{6}\left[a + (a + bh + ch^2) + 4\left(a + \frac{bh}{2} + \frac{ch^2}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{h}{6}\left[6a + 3bh + 2ch^2\right] = ah + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3}.$$

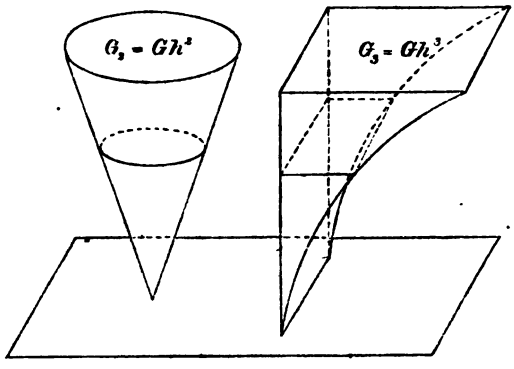
Dies sind in der That die Einzelinhalte der drei Körper, wenn $G = a$, $G_1 = bh$ und $G_2 = ch^2$ ihre Oberschnitte waren. Man kann diese Körper als Simpsonsche Körper 0ten, 1ten und 2ten Grades bezeichnen, weil ihre Querschnitte in Bezug auf y von diesem Grade sind.

Setzt man $G_1 = Gh$ und $G_2 = Gh^2$, so treten die drei Körper in eine merkwürdige Beziehung. Jeder Querschnitt des folgenden stellt nämlich das statische Moment vom Querschnitt des vorhergehenden in Bezug auf die Grundfläche dar. So ist z. B. Gh das statische Moment von G in Bezug auf die Basis, Gh^2 das statische Moment von Gh in Bezug auf die Basis. Ebenso erhält man als statisches Moment des Querschnitts in Höhe y beim ersten Körper Gy. In der That ist die gleich hohe Querschnittsfläche des zweiten Körpers $G_1\frac{y}{h} = (Gh)\frac{y}{h} = Gy$. Das statische Moment davon in Bezug auf die Grundfläche ist $(Gy)y = Gy^2$. Die gleich hohe Querschnittsfläche des dritten Körpers ist $G_2\frac{y^2}{h^2} = (Gh^2)\frac{y^2}{h^2} = Gy^2$, was damit übereinstimmt. Demnach muß auch übereinstimmen der Inhalt des zweiten Körpers mit dem statischen Momente des ersten in Bezug auf die Grundfläche, der Inhalt des dritten mit dem statischen Momente des zweiten. Die Inhalte sind der Reihe nach Gh, $G_1h = G\frac{h^2}{2}$, $G_2h = G\frac{h^3}{3}$. In der That ist das statische Moment des ersten Körpers $Gh \cdot \frac{h}{2} = G\frac{h^2}{2}$, das des zweiten $G_2\left(\frac{2}{3}h\right) = G\frac{h^2}{2} \cdot \frac{2}{3}h = G\frac{h^3}{3}$.

In Fig. 165 ist aus dem dritten Körper ein vierter derart abgeleitet, daß wiederum der Querschnitt in jeder Höhe gleich dem statischen Momente des gleich hohen Querschnitts des vorigen in Bezug auf die Grundfläche ist.

Digitized by Google

Fig. 165.



Bei letzterem hat man in Höhe h den Schnitt Gh^2, dessen statisches Moment Gh^3 ist. In Höhe y hatte man $G_2 \frac{y^2}{h^2} = Gh^2 \frac{y^2}{h^2} = Gy^2$. Das Moment ist Gy^3. Beim andern Körper ist deshalb in Höhe y der Schnitt Gy^3 angenommen. Nun ist aber das Moment des vorigen Körpers $\frac{Gh^3}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}h\right) = G_3 \frac{h^4}{4}$, denn der Schwerpunkt liegt in Höhe $\frac{3}{4}h$. Folglich ist der Inhalt des letzten Körpers ebenfalls $G\frac{h^4}{4}$ oder Grundfläche Gh^3 mal Höhe h dividiert durch 4. Auch er genügt der Newton-Simpsonschen Formel, denn für ihn ist $U = 0$, $O = Gh^3$, $M = Gy^3 = G\left(\frac{h}{2}\right)^3 = G\frac{h^3}{8}$, also ist $\frac{h}{6}\left[U + O + 4M\right]$ $= \frac{h}{6}\left[0 + Gh^3 + 4 \cdot \frac{Gh^3}{8}\right] = \frac{Gh^4}{4} = J$, womit die Formel bestätigt wird. Kombiniert man alle 4 Körper in der besprochenen Weise, so folgt: Hat ein Körper in der Höhe y den Querschnitt

$$a + by + cy^2 + dy^3,$$

so ist sein Inhalt bis zur Höhe h

$$J = \frac{h}{6}\left[U + O + 4M\right].$$

Probe durch Rechnung. Der Querschnitt in Höhe 0 ist

$$a + b \cdot 0 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0^3 = a,$$

der Schnitt in Höhe h ist $a + bh + ch^2 + dh^3$,

" " " " $\frac{h}{2}$ " $a + b\frac{h}{2} + c\frac{h^2}{4} + \frac{dh^3}{8}$,

folglich ist

$$\frac{h}{6}\left[U + O + 4M\right]$$

$$= \frac{h}{6}\left[a + (a + bh + ch^2 + dh^3) + 4\left(a + \frac{bh}{2} + \frac{ch^2}{4} + \frac{dh^3}{8}\right)\right]$$

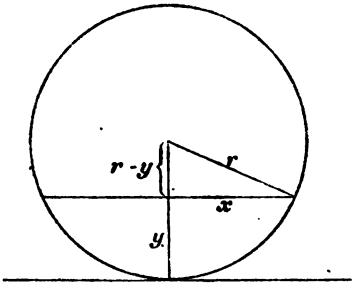
$$= \frac{h}{6}\left[6a + 3bh + 2ch^2 + \frac{3}{2}dh^3\right] = ah + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4} = J,$$

denn es handelt sich nach Obigem um die Inhalte der vier Einzelkörper.

Digitized by Google

Wollte man eine Potenz höher gehen, so würde sich zeigen, daß der Körper vom Querschnitt Gy^4 der Simpson-Regel nicht mehr gehorcht, sie gilt nur von den Simpsonschen Körpern bis zum dritten Grade und von ihren Combinationen.

Fig. 166.



Beispiel. Bei der Kugel ist der Radius x in Höhe y zu berechnen aus $x^2 = r^2 - (r-y)^2 = 2ry - y^2$. Dies ist vom 2ten Grade, folglich gilt die Simpson-Regel. Bei der Kugel ist $U = 0$, $O = 0$, $M = r^2\pi$. Demnach ist

$$J = \frac{h}{6}\left[U + O + 4M\right]$$

$$= \frac{h}{6}\left[0 + 0 + 4r^2\pi\right] \text{ oder, da } h = 2r \text{ ist, } J = \tfrac{4}{3}r^3\pi.$$

Weitere Beispiele werden später gegeben.

64) Zweite Ableitung.

Man zerlege jeden der besprochenen Körper in n horizontale Schichten von gleicher Höhe $\frac{h}{n}$. Dann hat der erste Körper (Cylinder oder Prisma) Schichten vom Inhalte $\frac{ah}{n}$, zusammen also vom Inhalte ah, was selbstverständlich ist.

Beim zweiten Körper (Dreieckskörper) denke man sich die Schichten als senkrechte Prismen, wobei allerdings Treppenräume auftreten. Dieselben werden aber unsichtbar, wenn man n unendlich groß annimmt, so daß der unendlich kleine Fehler vernachlässigt werden kann. Die Querschnitte sind der Reihe nach, wenn $G_1 = Gh$ ist, $G\frac{h}{n}$, $G\frac{2h}{n}$, $G\frac{3h}{n}\cdots$, $G\frac{nh}{n}$, also die Schichten zusammengenommen (Multiplikation jedes einzelnen mit $\frac{h}{n}$)

$$G\frac{h^2}{n^2} + G\frac{2h^2}{n^2} + G\frac{3h^2}{n^2} + \cdots + G\frac{nh^2}{n^2} = Gh^2\,\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}.$$

Für $n = \infty$ ist der Bruch nach Arithm. Nr. 38 gleich $\frac{1}{2}$, also ist

$$J = \frac{Gh^2}{2}.$$

Beim dritten Körper ist $G_2 = Gh^2$, also sind nach Obigem die Querschnitte der Reihe nach $G\frac{h^2}{n^2}$, $G\frac{2^2h^2}{n^2}$, $G\frac{3^2h^2}{n^2}\cdots$, $G\frac{n^2h^2}{n^2}$, also die Schichten zusammengenommen

Digitized by Google

$$G\frac{h^2}{n^2}\frac{h}{n} + G\frac{2^2h^2}{n^2}\frac{h}{n} + G\frac{3^2h^2}{n^2}\frac{h}{n} + \cdots + G\frac{n^2h^2}{n^2}\frac{h}{n}$$
$$= Gh^3\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3} = G\frac{h^3}{3}$$

für $n = \infty$.

Dieselbe Methode giebt für den Körper mit Querschnitt $q_y = Gy^3$ den Inhalt $Gh^4\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4} = G\frac{h^4}{4}$, für den Körper mit Querschnitt $q_y = Gy^p$ den Inhalt $Gh^{p+1}\frac{1^p+2^p+3^p+\cdots n^p}{n^{p+1}}$ $= \frac{Gh^{p+1}}{p+1}$.

Jede dieser Formeln nennt man (der Summation der unendlich vielen Schichten wegen) eine Summenformel. Setzt man sämtliche Körper zu einem zusammen, so folgt:

Hat ein Körper in jeder Höhe y den Querschnitt

$$q_y = a + by + cy^2 + dy^3 + \cdots + ky^p,$$

so ist sein Inhalt von der Höhe 0 bis zur Höhe h

$$\int_0^h J = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4} + \cdots + k\frac{h^{p+1}}{p+1}.$$

Auch dieser Ausdruck wird aus dem obigen Grunde als Summenformel bezeichnet. Er ist weit allgemeiner, als die Simpsonsche Regel.

Geht der Querschnitt blos bis zur 3ten Potenz, und bildet man U, O und M, so findet man wie in Nr. 63, daß

$$\frac{h}{6}[U + O + 4M] = ah + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4} = J$$

ist, womit die Simpson-Newtonsche Regel unabhängig von den früheren Betrachtungen gefunden ist.

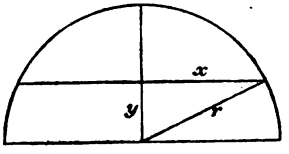
Bemerkung. Bei diesen vom 0ten bis zum p^{ten} Grade gehenden Einzelkörpern ist wiederum der Querschnitt jedes einzelnen das statische Moment vom gleich hohen Querschnitt des vorangegangenen, sein Inhalt gleich dem statischen Momente des vorigen Körpers. Man drückt sich auch so aus: Der Inhalt des 2ten Körpers ist das Moment 1ter Ordnung des ersten, der des dritten das Moment 2ter Ordnung des ersten Körpers, der Inhalt des vierten das Moment 3ter Ordnung des ersten Körpers u. s. w.; die Zählung kann man beginnen, wo man will. Die Momente 2ter Ordnung sind von Wichtigkeit als sogenannte Trägheitsmomente, bei denen also jedes Raumteilchen mit dem Quadrate des Abstandes von der Ebene multipliziert wird. Das Wesen und die Bedeutung der Trägheitsmomente werden in der Mechanik erörtert. Simpson-Regel und Summenformel gelten auch von

Digitized by Google

ebenen Flächen, wenn die Querschnittslinie für die Höhe y sich nach der obigen Formel (für q_y) berechnen läßt.

65) **Beispiel.** Anwendung der Summenformel auf die Halbkugel und einige ihrer Momente.

Fig. 167.



a) Inhalt. Der Schnitt in Höhe y ist $q_y = x^2\pi = (r^2 - y^2)\pi = r^2\pi - \pi y^2$.

Folglich der Inhalt der Schicht bis zur Höhe h nach der Summenformel

$$J = r^2\pi h - \pi\frac{h^3}{3}.$$

Setzt man $h = r$, so wird

a) $$J = r^2\pi r - \frac{\pi r^3}{3} = \frac{2}{3}r^3\pi,$$

was wirklich der Inhalt der Halbkugel ist.

b) Statisches Moment im Bezug auf die Grundfläche. Der vorige Querschnitt q_y ist mit y zu multiplizieren (statisches Moment!), der neue wird

$$q_y = r^2\pi y - \pi y^3.$$

Die Summenformel giebt von Höhe 0 bis Höhe h als statisches Moment der Schicht

$$M = r^2\pi\frac{h^2}{2} - \frac{\pi y^4}{4}.$$

Setzt man $h = r$, so entsteht als Moment der Halbkugel

b) $$M = r^2\pi\frac{r^2}{2} - \frac{\pi r^4}{4} = \frac{r^4\pi}{4}.$$

c) Die Schwerpunktshöhe der Halbkugel. Die Schwerpunktshöhe y_s multipliziert mit dem Inhalte giebt das statische Moment, also ist $y_s \cdot \left(\frac{2}{3}r^3\pi\right) = \frac{r^4\pi}{4}$, folglich

c) $$y_s = \frac{3}{8}r.$$

d) Trägheitsmoment der Halbkugel in Bezug auf die Grundfläche. Der vorige Querschnitt ist mit y zu multiplizieren, also wird jetzt

$$q_y = r^2\pi y^2 - \pi y^4.$$

Die Summenformel giebt als Trägheitsmoment der Schicht von Höhe 0 bis Höhe h

$$T = r^2\pi\frac{h^3}{3} - \pi\frac{h^5}{5}.$$

Setzt man $h = r$, so findet man als Trägheitsmoment der Halbkugel

Digitized by Google

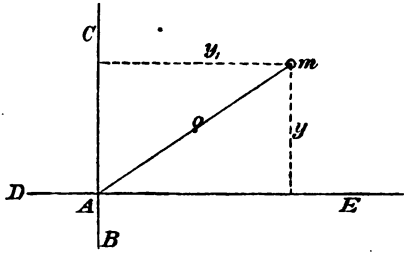
d) $$T = r^2\pi\frac{r^3}{3} - \pi\frac{r^5}{5} = \frac{2}{15}r^5\pi.$$

Für die ganze Kugel erhält man als Trägheitsmoment in Bezug auf einen Hauptschnitt

e) $$T = \frac{4}{15}r^5\pi = \left(\frac{4}{3}r^3\pi\right)\frac{r^2}{5} = J\frac{r^2}{5}.$$

Sind DE und BC die Projektionen zweier Hauptschnitte der Kugel, die auf einander senkrecht stehen, so daß A die Projektion ihres Schnittes ist, so ist $y^2 + y_1^2 = \varrho^2$. Für ein Raumteilchen m ist also $my^2 + my_1^2 = m\varrho^2$, für viele Raumteilchen also $\Sigma my^2 + \Sigma my_1^2 = \Sigma m\varrho^2$, d. h. das Trägheitsmoment in Bezug auf die Achse A ist die Summe der Trägheitsmomente für die Hauptschnitte BC und DE. Also ist für die Kugel das Trägheitsmoment für einen Durchmesser als Achse

Fig. 168.



f) $$T = \frac{4}{15}r^5\pi + \frac{4}{15}r^5\pi = \frac{8}{15}r^5\pi = \left(\frac{4}{3}r^3\pi\right)\frac{2r^2}{5} = \frac{2r^2}{5}J.$$

Die Mechanik setzt statt J die Masse m der Kugel, so daß

g) $T = \frac{2}{5}mr^2$ wird und löst mit Hülfe dieses Ausdrucks zahlreiche Aufgaben über die Dynamik der Kugeln, z. B. des Erdballs.

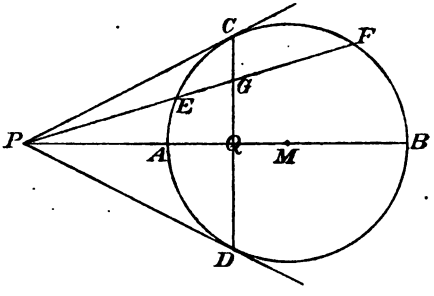
Dieses eine Beispiel möge andeuten, von wie außerordentlicher Tragweite die Summenformel ist. Nur für a) b) und c) würde die Simpsonsche Regel ausgereicht haben, für die späteren Entwickelungen aber nicht, da die „Querschnitte" über den dritten Grad hinausgingen.

IX. Kugelbetrachtungen mit kartographischen Anwendungen.

66) Fig. 169 stellt einen Kreis dar, an den von P aus Tangenten gezogen sind, so daß DC die Berührungssehne (Polare) ist. Jede Sekante PF enthält harmonische Punkte $PGEF$, zugleich ist $PC^2 = PE \cdot PF$, also, wenn man $PC = 1$ setzt, $PE = \frac{1}{PF}$ und $PF = \frac{1}{PE}$. (Inversion.) Ferner ist $MQ \cdot MP = MA^2$, also, wenn man $r = 1$ setzt, $MQ = \frac{1}{MP}$.

Digitized by Google

Fig. 169.

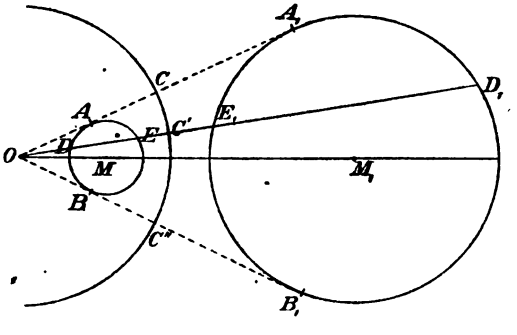


Dreht man die Figur um die Achse PB, so verwandelt sich der Kreis in eine Kugel, die Tangente PC giebt einen Tangentenkegel PCD, und alle Tangenten von P an die Kugel sind einander gleich. Die Gerade DC wird die Berührungsebene des Tangentenkegels, auch Polarebene des Punktes P genannt. Jede Kugelsekante ist harmonisch geteilt, denn $PGEF$ bleibt bei der Drehung ein harmonisches Punktsystem. Setzt man $PC = 1$, so bleibt für die Kugel $PE = \frac{1}{PF}$, der Teil DAC der Kugeloberfläche ist also das Inversionsbild des Teils DBC. Auch bleibt allgemein $PE \cdot PF = PC^2$. Setzt man aber $MA = 1$, so ist wieder $MQ = \frac{1}{MP}$.

Versuche dieselben Betrachtungen für einen Punkt P innerhalb der Kugel und seine außerhalb liegende Polarebene.

67) In Fig. 170 ist der Kreis M_1 das Inversionsbild des Kreises M gegen den spiegelnden Kreis O, also z. B. $OA \cdot OA_1 = OC^2$, $OD \cdot OD_1 = OC'^2$, $OE \cdot OE_1 = OC'^2$, oder, wenn $OC = 1$ gesetzt wird, $OA_1 = \frac{1}{OA}$, $OD_1 = \frac{1}{OD}$, $OE_1 = \frac{1}{OE}$ u. s. w. O ist äußerer Ähnlichkeitspunkt der Kreise M und M_1.

Fig. 170.



Dreht man die Zeichnung um die Achse OMM_1, so entstehen Kugeln. Folglich: Das Inversionsbild einer Kugel gegen eine andere Kugel ist stets eine Kugel. Das Inversionscentrum ist Ähnlichkeitspunkt beider Kugeln.

Schneidet der Kreis M den spiegelnden Kreis O rechtwinklig, so ist sein

Digitized by Google

äußerer Teil das Inversionsbild des inneren (Fig. 171). Durch Drehung um OM entstehen zwei sich rechtwinklig schneidende Kugeln. Man erkennt:

Schneidet eine Kugel die spiegelnde Kugel rechtwinklig, so ist ihr äußerer Teil das Inversionsbild des inneren.

Fig. 171.

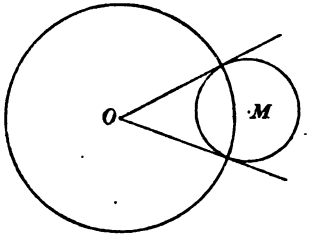
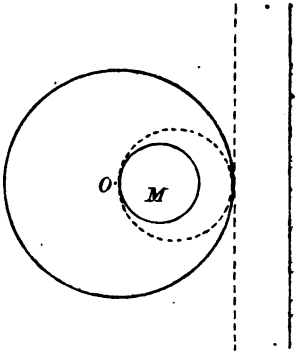


Fig. 172.



Ebenso folgt: Geht eine Kugel durch das Inversionscentrum O, so ist ihr Spiegelbild eine Ebene, denn aus $\frac{1}{0} = \infty$ folgt, daß das Spiegelbild sich ins Unendliche erstreckt, so daß der Radius des Bildes unendlich groß ist. Berührt dabei die durch O gehende Kugel die spiegelnde Kugel, so ist ihr Bild eine Tangentialebene. (Fig. 172.)

68) Die stereographische Projektion von Hipparch-Ptolemäus.

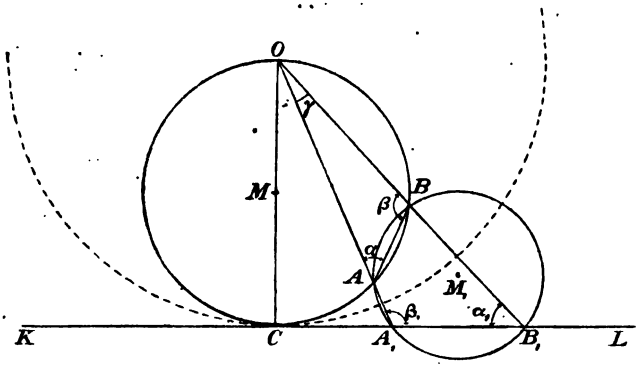
In Fig. 173 sei O das Inversionscentrum, $OC = 1$ der Radius des Inversionskreises, so daß KL das Spiegelbild des Kreises M ist. Aus $OA \cdot OA_1 = OC^2 = 1$ und $OB \cdot OB_1 = OC^2 = 1$ folgt $OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1$ oder $OA : OB = OB_1 : OA_1$, und da $\sphericalangle \gamma$ sich selbst gleich ist, so ist $\triangle OAB \sim \triangle OB_1A_1$, folglich $\sphericalangle \alpha = \alpha_1$ und $\sphericalangle \beta = \beta_1$. Folglich sind im Viereck ABB_1C_1 je zwei gegenüberliegende Winkel zusammen gleich 180^0, um das Viereck läßt sich also ein Kreis beschreiben. Da nun die Punkte B und B_1 bezw. A und A_1 sich bei der Inversion gegenseitig entsprechen, so ist der Kreis ABB_1A_1 ein solcher, der sein eignes Inversionsbild ist, d. h. er schneidet den Kreis O rechtwinklig.

Jetzt stelle der Kreis um O eine Kugel dar, ebenso die Kreise um M und M_1, so daß die Tangentialebene KL das Bild der Kugel M ist, während die Kugel M_1 ihr eignes Inversionsbild ist. Die

Digitized by Google

letztere schneidet die Kugel M in einem Kreise AB und die Tangentialebene KL in einem Kreise A_1B_1, da aber die Kugel M_1 ihr eignes

Fig. 173.



Inversionsbild ist, so ist der Kreis A_1B_1 das Inversionsbild des Kreises AB.

Mit anderen Worten: Projiziert man einen beliebigen Kreis einer Kugel von einem Punkte O der Kugeloberfläche aus auf die gegenüberliegende Tangentialebene, so entsteht als Projektion stets ein Kreis. (Er wird zur Geraden, wenn der projizierte Kreis durch O geht.)

[Gleichzeitig erkennt man folgendes: In dem schiefen Kreiskegel ABO ist nicht nur AB ein Kreisschnitt, sondern auch A_1B_1. Jeder schiefe Kreiskegel hat also zwei Parallelscharen von Kreisschnitten, Schnitt und Gegenschnitt.]

Fig. 174.

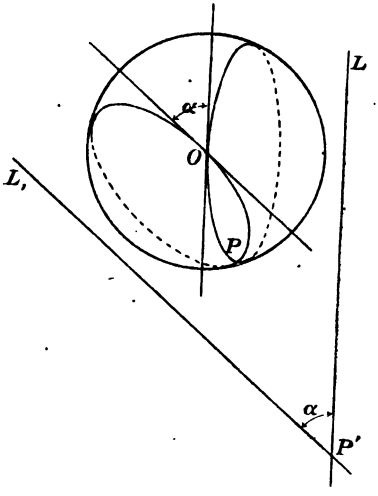


Fig. 174 ist eine Grundrißzeichnung, O ist als oberster Punkt der Kugel aufzufassen und hat dieselbe Bedeutung wie vorher. In O schneiden sich zwei Kreise unter dem $\sphericalangle\ \alpha$, der zugleich der ihrer Tangenten in O ist. Die Projektionsbilder der beiden Kreise durch O sind Gerade KL und K_1L_1, die zu den Tangenten in O parallel

Digitized by Google

sind. Folglich ist ihr Schnittwinkel α_1 gleich dem Schnittwinkel der Kreise in den Punkten O und P. Nun ist aber P' die Projektion von P, folglich: Gleichen Winkeln bei P entsprechen gleiche Winkel bei P' denn es lassen sich andere Kreise durch O und P legen, von denen dasselbe gilt. Folglich: Die Projektionsbilder sich schneidender Kugelkreise werden bei der besprochenen Projektion Kreise, die sich unter demselben Winkel schneiden. Folglich gilt z. B. der Satz:

Das Büschel der Meridiankreise auf der Kugel und die senkrecht schneidende Schar von Parallelkreisen geht bei der Projektion von einem beliebigen Kugelpunkte aus auf die gegenüberliegende Tangentialebene über in ein Kreisbüschel durch zwei Punkte und die dasselbe rechtwinklig durchsetzende Kreisschar. Ein sehr kleines Kreisdreieck auf der Kugel geht über in ein gleichwinkliges, also ähnliches auf der Tangentialebene, folglich wird die Projektion eine winkeltreue (isogonale) und in den kleinsten Teilen ähnliche.

Ist also z. B. die Kugelfläche durch Meridiane und Parallelkreise in kleine Quadrate eingeteilt, so erhält man in der Projektion die Einteilung der Ebene in kleine Quadrate durch Kreisbüschel und Kreisschar, wie sie in den Figuren 79, 80, 81 und 82 der Planimetrie bereits dargestellt ist. Die dort dargestellte Polarkarte, die Karte der östlichen oder westlichen Halbkugel, die der größten oder kleinsten Wassermasse, entstehen also sämtlich durch Centralprojektion von einem Punkte der Kugelfläche aus auf die sogenannte Antipodenebene.

Man nennt diese Projektionsart die stereographische Projektion von Hipparch-Ptolemäus*).

X. Zusammenstellung der wichtigsten Berechnungsformeln der Stereometrie.

1) Prisma und Cylinder, senkrecht und schräg, $J = Gh$.

2) Mantelfläche des senkrechten Cylinders und Prismas, $M = uh$.

3) Dachkörper, $J = \frac{Gh}{2}$.

4) Pyramide und Kegel, $J = \frac{Gh}{3}$.

*) Nähres siehe in der „Einführung in das stereometrische Zeichnen" und unten am Schlusse des Anhangs.

Digitized by Google

5) Kegelmantel, $M = r\pi s$.

6) Stumpf des Dachkörpers, $J = \frac{G+g}{2}h$.

7) Kegelstumpf, senkrecht und schräg, $J = \frac{\pi h}{3}\left[r^2 + r\varrho + \varrho^2\right]$.

8) Mantel des Kegelstumpfs, $M = (r+\varrho)\pi s$, wo $s = \sqrt{(r-\varrho)^2 + h^2}$.

9) Pyramiden- und Kegelstumpf, $J = \frac{h}{3}\left[G + \sqrt{Gg} + g\right]$.

10) Kugelinhalt, $J = \frac{4}{3}r^3\pi$.

11) Kugeloberfläche $O = 4r^2\pi$.

12) Kugelabschnitt, $J = \frac{\pi h^2}{3}\left(3r - h\right) = \frac{\pi h}{6}\left(3a^2 + h^2\right)$.

13) Kugelausschnitt, $J = \frac{2}{3}r^2\pi h$.

14) Kalotte und Zone, $O = 2r\pi h$.

15) Kugelschicht, $J = \frac{\pi h}{6}\left[3a^2 + 3b^2 + h^2\right]$.

16) Inhalt des Drehungskörpers, $J = 2\varrho\pi F$.

17) Mantel des Drehungskörpers, $M = 2\varrho'\pi s$.

18) Abgeschrägtes Prisma und Cylinder, $J = G \cdot h_s$ (wo G der Normalschnitt ist).

19) Abgeschrägtes Prisma und Cylinder, $M = u \cdot h_s'$. (u = Peripherie des Normalschnitts).

20) Newton-Simpsonsche Formel für Körper mit Querschnitt bis zum 3ten Grade:

$$J = \frac{h}{6}\left[U + O + 4M\right].$$

21) Summenformel für Körper vom Querschnitt

$$q_y = a + by + cy^2 + dy^3 + \cdots + ky^p:$$

$$J = \frac{ah}{1} + \frac{bh^2}{1\cdot 2} + \frac{ch^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{dh^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{kh^{p+1}}{p+1}.$$

Digitized by Google

Fünfte Abteilung.

Die Grundlehren von den Kegelschnitten.

1) **Vorbemerkung.** Jeder ebene Schnitt durch einen senkrechten oder schiefen Kreiskegel heißt ein Kegelschnitt. Auch der senkrechte und schiefe Kreiscylinder kann als Kegel betrachtet werden, nur liegt bei ihm die Spitze in unendlicher Entfernung. Demnach gehören auch die Schnitte solcher Cylinder zu den Kegelschnitten. Auch über den Kegelschnitten lassen sich Cylinder und Kegel errichten. Es läßt sich zeigen, daß auch die ebenen Schnitte dieser Gebilde Kegelschnitte im gewöhnlichen Sinne geben. Ist dies der Fall, so bedeutet es nur eine Auffassung von einem anderen Gesichtspunkte aus, wenn man sagt, jede Parallel- oder Centralprojektion eines Kegelschnittes giebt wieder einen Kegelschnitt. Es läßt sich vermuten, daß, da der Kreis ein Kegelschnitt ist, zahlreiche seiner Eigenschaften sich auf die übrigen Kegelschnitte übertragen lassen oder auf besondere Eigenschaften der letzteren hinführen. Noch sei bemerkt, daß in der analytischen Geometrie jeder Kegelschnitt eine ebene Kurve ist, in deren Gleichung die Koordinaten in keiner höheren als der zweiten Potenz vorkommen, und daß umgekehrt jede ebene Kurve zweiten Grades einen Kegelschnitt bedeutet. Es handelt sich also hier um ein in sich vollkommen abgerundetes Gebiet der Elementarmathematik, in welches jedoch hier nur ein Einblick gegeben werden soll.

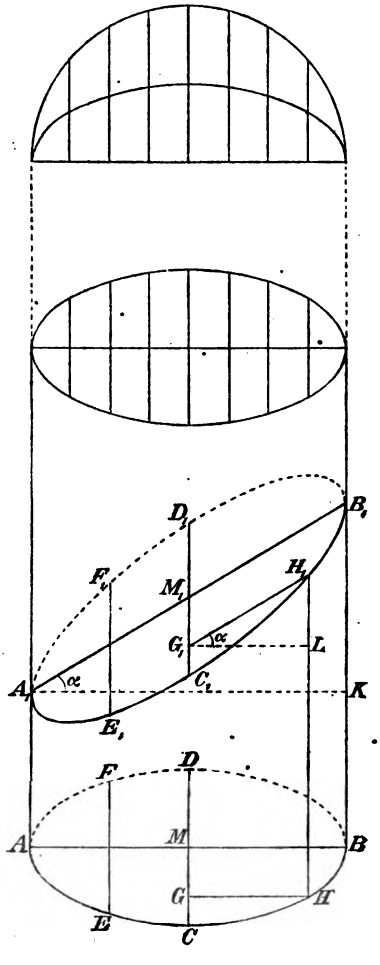
I. Die Ellipse als Cylinderschnitt.

2) Figur 175 stellt einen senkrechten Kreiscylinder (in der Parallelperspektive 1 : 2 mit Neigung 90^0) dar. Durch den Punkt M_1

Digitized by Google

seiner Achse ist eine nach hinten gehende Horizontale C_1D_1 ($\# CD$) gezogen und durch diese eine Ebene $A_1C_1B_1D_1$ gelegt, deren Neigungswinkel als $\sphericalangle B_1A_1K = \alpha$ zu messen ist, so daß A_1B_1 die Richtung ihrer steilsten Geraden angiebt. Die Schnittkurve $A_1C_1B_1D_1$ heißt Ellipse. Der Grundkreis ist eine senkrechte Projektion dieser Ellipse, die Ellipse die schräge Parallelprojektion des Kreises auf die Ebene $A_1C_1B_1$, bei der zunächst die Strahlen senkrecht zum Kreise stehen. Jede Horizontale E_1F_1 der Ellipse ist gleich und parallel ihrer Projektion EF, jede steilste Gerade G_1H_1 ($\parallel A_1B_1$) steht zu ihrer Projektion GH in demselben Verhältnis, wie $M_1B_1 : MB$ oder wie $A_1B_1 : AB$. Sämtliche Parallelen zu C_1D_1 in der Ellipsenfläche sind durch A_1B_1 halbiert, sämtliche zu A_1B_1 parallelen Sehnen sind durch C_1D_1 halbiert. (Warum?) Folglich:

Fig. 175.



Verlängert man bei einem Kreise die senkrecht gegen einen Halbmesser gezogene Parallelschar von Halbsehnen in demselben Verhältnis, so entsteht eine Ellipse. (In Fig. 176 ist 1 : 2 gewählt.)

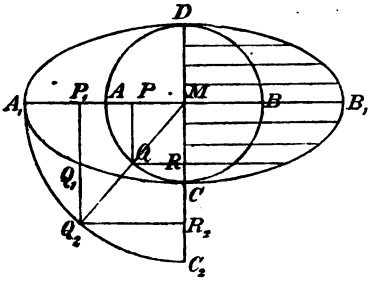
Der verlängerte Durchmesser A_1B_1 heißt die große Achse, der unverändert gebliebene CD heißt die kleine Achse der Ellipse. A_1B_1 und CD sind die Mittellinien des der Ellipse zu umschreibenden Hauptrechtecks. Beide Geraden sind Symmetrieachsen*) der Ellipse,

*) Wenn in Fig. 175 die Gerade A_1B_1 nicht wie eine Symmetrieachse aussieht, so hat dies nur perspektivische Gründe. Man muß zwischen wirklicher und scheinbarer Symmetrieachse unterscheiden.

Digitized by Google

die also einen Mittelpunkt M hat, so daß alle durch M gezogenen Sehnen halbiert sind. $\frac{CD}{A_1B_1}$ oder $\frac{MD}{MB_1}$ heißt das Achsenverhältnis der Ellipse. Die schräg durch den Cylinder gelegten Ebenen bringen Ellipsen mit allen möglichen Achsenverhältnissen zur Anschauung. (Specialfälle: Kreis mit 1 : 1; zwei unbegrenzte parallele Gerade mit 1 : ∞; eine unbegrenzte Gerade, d. h. der durch eine Tangentialebene bestimmte „Schnitt")

Fig. 176.



3) In Fig. 176 ist für den Kreispunkt Q nicht nur die Vergrößerung des Abstandes QR, sondern auch die von QP durchgeführt, wodurch Q_2 auf der in gleicher Weise verlängerten Geraden MQ entstanden ist. Dabei ist $P_1Q_2R_2M \sim PQRM$, und Q_2 liegt auf einem Kreise, dessen Radius die große Halbachse ist. Jede senkrechte Halbachse dieses Kreises, im entsprechenden Verhältnis verkürzt, giebt einen Punkt der gezeichneten Ellipse. Folglich:

Verkürzt man die parallelen Halbsehnen eines Kreises in demselben Verhältnis, so entsteht eine Ellipse.

Diese konstante Verkürzung kann man z. B. erreichen, indem man den schrägliegenden Kreis senkrecht auf die horizontale Ebene projiziert. Also:

Durch Normalprojektion des Kreises entsteht eine Ellipse.

Dabei handelt es sich um einen Cylinder, der als schiefer Kreiscylinder oder als senkrechter elliptischer Cylinder aufgefaßt werden kann.

4) Jeder der beiden bis jetzt behandelten Cylinder enthielt Kreisschnitte. Jeder Kreisschnitt besitzt unzählige umbeschriebene Quadrate, und zu jedem der letzteren gehören zwei Parallelscharen halbierter Sehnen. Von jedem Ellipsenschnitt (Fig. 178) muß demnach (durch Parallelprojektion der entsprechenden Fig. 177) Folgendes gelten:

Zieht man in einer Ellipse parallele Sehnen von beliebiger Richtung, so liegen deren Halbierungspunkte sämtlich auf einem Durchmesser (EF). Die Tangenten in den Endpunkten desselben (AD und BC) sind parallel zur Sehnenschar. Die Tangenten in den Endpunkten des zur Sehnen-

Digitized by Google

schar gehörigen Durchmessers GH, also AB und CD, sind parallel zu dem halbierenden Durchmesser EF. Die Sehnen der Parallelschar stehen bei der Ellipse unter einander in demselben Verhältnis, wie die entsprechenden Sehnen beim Kreise. So ergiebt sich z. B. Folgendes:

Legt man die in demselben Verhältnis verlängerte oder verkürzte Parallelschar von Sehnen eines Kreises in **beliebiger** Richtung als Parallelschar an den Durchmesser an (wie es vorher unter 90^0 geschah), so entsteht eine Ellipse.

Fig. 177.

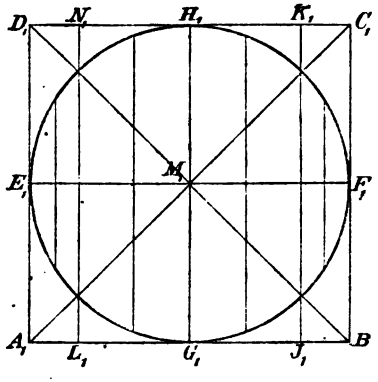
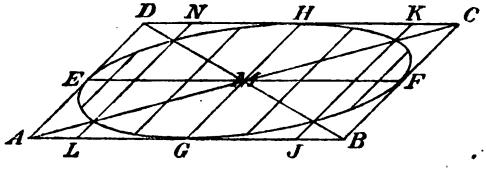


Fig. 178.



5) An dieser Ellipse kann man mit jeder Parallelschar dasselbe wiederholen, stets entsteht wieder eine Ellipse, die man auch direkt aus dem Kreise entstehen lassen könnte. Dasselbe erreicht man, indem man über einer Ellipse einen beliebigen schrägen Cylinder konstruiert und diesen durch eine ganz beliebige Ebene schneidet. Folglich:

Jeder ebene Schnitt durch jeden beliebigen (senkrechten oder schiefen) elliptischen Cylinder ist eine Ellipse, jede beliebige Parallelprojektion der Ellipse ist eine Ellipse. Im speciellen Falle treten Kreise an die Stelle der Ellipse. An jedem elliptischen Cylinder lassen sich Kreisschnitte auffinden.

Der Kreis und die Kugel erscheinen in der Parallelperspektive stets als Ellipse, ihr von der Sonne auf eine Ebene geworfener Schatten ist stets eine Ellipse. (Tangentencylinder der Sonnenstrahlen an der Kugel.)

6) Halbiert man zwei parallele Sehnen der Ellipse, so erhält man durch Verbindung der Halbierungspunkte den halbierenden Durchmesser der Sehnenschar, und die Figur läßt sich zu einem umbeschriebenen Parallelogramm ergänzen, dessen Berührungspunkte den Mittellinien angehören. Diese besondere Art umbeschriebener Parallelo-

Digitized by Google

gramme hat die Eigentümlichkeit, daß, wenn die eine Richtung gegeben ist, die andere Richtung nicht mehr beliebig gegeben werden kann, sondern bereits bestimmt ist. Je zwei so zusammengehörige Richtungen bezeichnet man als konjugierte Richtungen, die durch sie gegebenen umbeschriebenen Parallelogramme heißen Konjugierten-Parallelogramme. (Vergl. $ABCD$ in Fig. 178.) Die letzteren sind stets als Parallelprojektionen eines umbeschriebenen Quadrates am Kreise aufzufassen. Im obigen Sinne spricht man von konjugierten Durchmessern, konjugierten Sehnen u. s. w.

7) Man denke sich einen schräg liegenden Kreis mit mehreren umbeschriebenen Quadraten senkrecht auf die Horizontalebene projiziert, so daß eine Ellipse mit mehreren umbeschriebenen Konjugierten-Parallelogrammen entsteht. Ist nun α der Neigungswinkel der Kreisebene, so erhält jeder Flächenteil F in der Projektion den Inhalt $F\cos\alpha$. Da aber alle umbeschriebenen Quadrate des Kreises flächengleich sind, so folgt, daß sämtliche Konjugierten-Parallelogramme der Ellipse flächengleich sind. (Jedes hat $F_1 = F\cos\alpha$, wo F die Quadratfläche ist.) Da ferner die Kreisfläche sich zur Quadratfläche hier wie $r^2\pi : (2r)^2$ oder wie $\pi : 4$ verhält, so verhält sich die Ellipsenfläche zu der jedes Konjugierten-Parallelogramms wie $\pi : 4$. So ist z. B. der Inhalt des Hauptrechtecks der Ellipse mit den Halbachsen a und b gleich $4ab$, folglich ist die Ellipsenfläche gleich $\left(4ab\right)\frac{\pi}{4} = ab\pi$, was sich auch aus der zuerst gegeben Konstruktionsmethode (in Nr. 2) ohne weiteres ableiten läßt.

Sind ferner c und d die unter dem Winkel α aneinander stoßenden Seiten des Konjugierten-Parallelogramms, so ist dessen Flächeninhalt $F_1 = cd\sin\alpha$, der der zugehörigen Ellipse also, die in den Schnittpunkten der Mittellinen berührt, ist

$$F = \frac{\pi}{4}cd\sin\alpha.$$

Da sich in das Parallelogramm noch andere Berührungsellipsen einzeichnen lassen, sei die besprochene als die Hauptellipse des Parallelogramms bezeichnet. [Den Umfang der Ellipse zu berechnen, ist mit elementaren Hülfsmitteln nicht möglich.]

8) Einige Übungsaufgaben.

a) Zu einer gegebenen Ellipse den Mittelpunkt und die Achsen zu finden.

Digitized by Google

Auflösung. Die Halbierungspunkte paralleler Sehnen bestimmen einen Durchmesser, dessen Halbierung den Mittelpunkt giebt. Ein Kreis um den letzteren, der die Ellipse in vier Punkten schneidet, giebt Sehnen, deren Richtungen mit den Achsenrichtungen übereinstimmen.

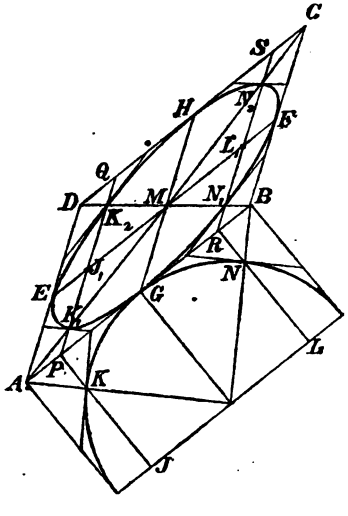
b) In einem Ellipsenpunkte die Tangente zu konstruieren.

Auflösung. Ziehe den zum Punkte gehörigen Durchmesser, halbiere ihn und ebenso eine parallele Sehne. Die Verbindungslinie der Halbierungspunkte giebt die Tangentenrichtung.

c) In ein gegebenes Parallogramm die Hauptellipse einzuzeichnen.

Auflösung. Man zeichne über der Grundlinie ein Quadrat mit dem umbeschriebenen Kreise und stelle Fig. 177 und 178 her. (Vergl. auch Fig. 179.)

Fig. 179.



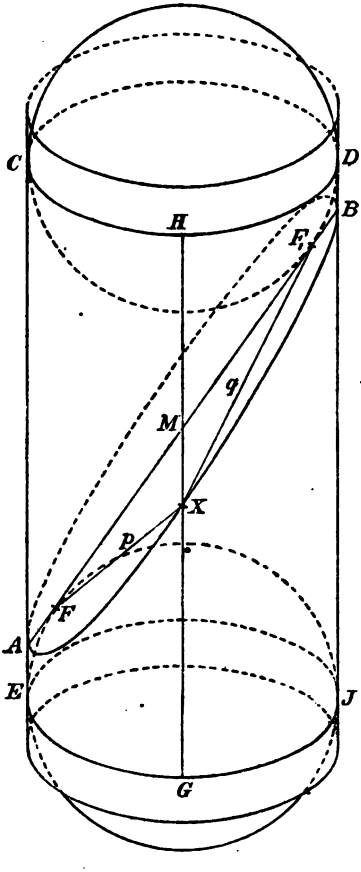
9) Wink für die Parallelperspektive. Soll in das Parallelogramm $ABCD$ (Fig. 179) die Hauptellipse schnell einskizziert werden, so ziehe man die Diagonalen AC und BD und durch ihren Schnittpunkt M die Mittellinien EF und GH, welche die Berührungspunkte geben. Die Halbkreislote JK und LN geben Parallele PQ und RS mit den Ellipsenpunkten K_1, K_2, N_1, N_2, durch welche Parallele zu den Diagonalen zu legen sind. So erhält man 8 Tangenten mit den Berührungspunkten, was zum Skizzieren der Ellipse ausreicht. Der Vergleich mit der Kreisfigur ergiebt die Richtigkeit.

Andere Übungen findet man in der „Einführung in das ster. Zeichnen". Die Sätze über Pol und Polare, ebenso die Sätze von Pascal und Brianchon gelten auf Grund der Parallelprojektion von der Ellipse ebenso, wie vom Kreise.

10) Berührungskugeln und Brennpunkte der Ellipse. Fig. 180 stellt einen Kreiscylinder mit schräger Schnittebene dar, in den Berührungskugeln soweit eingeschoben sind, daß sie die Schnittebene in F und F_1 berühren. [Von diesen Kugeln sind in Fig. 180 nur die Hauptkreise gezeichnet, denn genau genommen

Digitized by Google

Fig. 180.



müßten die Kugeln als Ellipsen erscheinen.] Verbindet man einen beliebigen Punkt X der Schnittcurve mit F und F_1 und legt man durch X die Gerade GH auf der Cylinderfläche, die von dem Berührungskreise CD bis zum Berührungkreise EJ reicht, so sind FX und XG als Tangenten an die untere Kugel einander gleich, ebenso F_1X und XH als Tangenten an die obere Kugel, folglich ist $FX + XF_1 = GX + XH$, oder $p + q = GH$. Nun ist aber der Abstand GH der parallelen Kreise CD und EJ überall derselbe, folglich muß auch die Liniensumme $p + q$ für alle Punkte der Schnittcurve dieselbe Größe haben. Man nennt F und F_1 aus einem später zu erörternden Grunde die Brennpunkte der Ellipse, ihre Verbindungslinien mit einem beliebigen Punkte der Peripherie bezeichnet man als zusammengehörige Brennstrahlen. Man hat also den Satz:

Die Summe zusammengehöriger Brennstrahlen der Ellipse ist eine konstante Größe.

AB ist die große Achse der Ellipse. Auf ihr liegen F und F_1 in derselben Entfernung e von M. Man nennt e die Brennweite der Ellipse.

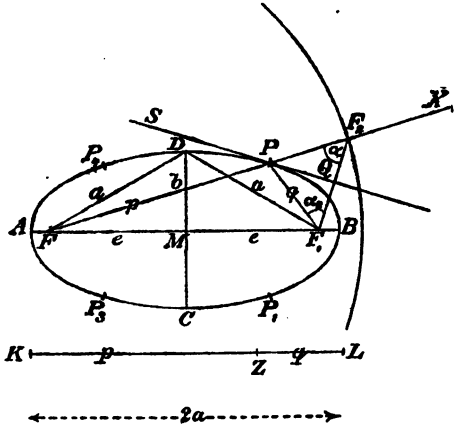
11) **Aufgabe.** Eine Ellipse von gegebener Brennweite e zu konstruieren, für welche die konstante Summe der Brennstrahlen gleich $2a$ ist.

Auflösung. Man lege $FF_1 = 2e$ (Fig. 181) beliebig hin. Auf $KL = 2a$ wähle man einen beliebigen Teilpunkt Z und schlage mit $KZ = p$ und $ZL = q$ Kreisbogen um F und F_1, die sich in zwei Punkten P und P_1 schneiden. Wechselt man für jede Zirkel-

Digitized by Google

öffnung den Brennpunkt, so findet man noch P_3 und P_4, also im ganzen vier symmetrisch liegende Punkte. Macht man $KZ = ZL = a$, so findet man die Endpunkte C und D der kleinen Achse b; macht man $KZ = a + e$ und demnach $ZL = a - e$, so findet man die Endpunkte A und B der großen Achse. Größer als $a + e$ darf man KZ nicht wählen, wenn sich die beiden Bogen schneiden sollen.

Fig. 181.



Bemerkung. Darauf beruht die bekannte Fadenkonstruktion der Ellipse. Außerdem erkennt man, daß $e^2 = a^2 - b^2$ ist. Wie findet man also aus den Achsen die Brennpunkte einer gegebenen Ellipse?

12) **Aufgabe.** Gegeben F und F_1 und die Brennstrahlsumme $2a$. Welcher Punkt des willkürlich von F aus gezogenen Strahles FX ist ein Punkt der gesuchten Ellipse?

Auflösung. Man mache $FF_2 = 2a$, ziehe F_1F_2, trage den Winkel $F_1F_2P = \alpha$ an F_1F_2 in F_1 an, so daß ein gleichschenkliges Dreieck F_1F_2P entsteht, dann ist P ein Punkt der Ellipse, denn es ist $FP + F_1P = 2a$. (Warum?)

13) **Bemerkung.** Errichtet man auf F_1F_2 im Halbierungspunkte Q ein Lot QS, so giebt dieses ebenfalls den Ellipsenpunkt P und ist zugleich die Tangente der Ellipse in P.

Für P ist nämlich $p + q = 2a$, für alle anderen Punkte von QS aber würde $p + q > 2a$ sein (vergleiche die Minimalweg-Aufgabe in Geom. Nr. 28), folglich liegen alle Punkte von QS mit Ausnahme von P außerhalb der Ellipse.

Daraus geht zugleich folgender Satz hervor:

Halbiert man den Brennstrahlwinkel, so erhält man die Normale der Ellipse; Halbierung seines Nebenwinkels giebt die Tangente der Ellipse. Folglich:

Gehen von dem einen Brennpunkte Lichtstrahlen aus, und denkt man sich diese von der Ellipse (nach dem be-

Digitized by Google

kannten optischen Gesetze der Gleichwinkeligkeit) reflektiert, so vereinigen sich sämtliche zurückgeworfenen Strahlen im anderen Brennpunkte.

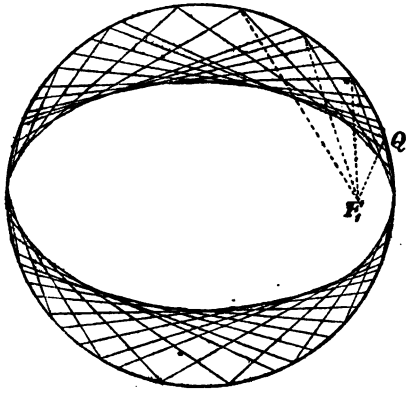
(Fallen hingegen von außen Lichtstrahlen in der Richtung nach dem einen Brennpunkte ein, so werden sie so zurückgeworfen, als ob sie aus dem anderen Brennpunkte kämen.)

Der Name Brennpunkt ist also optischen Ursprungs.

14) Alle möglichen Punkte F_2 liegen auf einem Kreise mit Radius $2a$ um den Mittelpunkt F_1, folglich die Halbierungspunkte Q aller möglichen Geraden F_1F_2 auf einem Kreise mit dem halb so großen Radius a (gesetzmäßige Verkleinerung $\frac{1}{2}$ mit äußerem Ähnlichkeitspunkte F_1). Man merke also noch folgende beiden Konstruktionen:

a) Schlägt man einen Kreis um F mit dem Radius $F_1F_2 = 2a$, verbindet man jedes F_2 mit F_1, und errichtet man in dem Halbierungspunkte Q auf jedem F_1F_2 ein Lot, so erhält man als Schnittpunkte mit dem entsprechenden FF_2 lauter Ellipsenpunkte P.

Fig. 182.



b) Hat man einen Kreis mit Radius a (Fig. 182) und in ihm einen beliebigen Punkt F_1, und errichtet man auf jedem Strahle F_1Q im Punkte Q der Peripherie ein Lot, so schattiert man die Ellipse durch lauter Tangenten aus. (Der Kreis wird der umbeschriebene Kreis der Ellipse.) Diese Konstruktion ist mit Hülfe des Winkeldreiecks leicht auszuführen. Legt man die Lote dicht genug an einander, so ist ein Ausziehen der Kurve überflüssig.

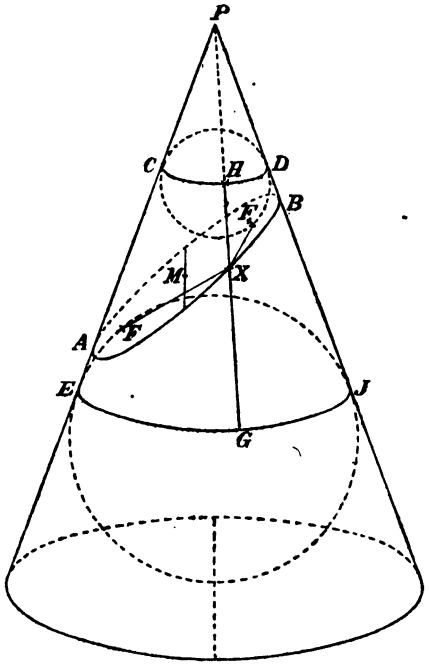
II. Die Ellipse als Kegelschnitt.

15) Fig. 183 stellt einen senkrechten Kreiskegel dar, der durch eine schräge Ebene geschnitten ist, die nur den einen Mantel, nicht seine Erweiterung nach oben trifft. In den Kegel sind Berührungs-

Digitized by Google

kugeln eingelegt, die zugleich die Ebene in F und F_1 berühren. Durch einen willkürlichen Punkt X der Schnittkurve ist wiederum eine Gerade GH auf der Kegeloberfläche vom Berührungskreise EJ bis zum Berührungskreise CD gelegt, außerdem ist X mit F und F_1 verbunden worden. Ebenso, wie im vorigen Abschnitt, ist $FX = XG$, $F_1X = XH$, folglich $FX + F_1X = GH$. Da aber $GH = DJ = CE$ für den auf der Kegelfläche gemessenen Abstand der beiden Parallelkreise CD und EJ eine konstante Größe ist, so ist $FX + F_1X$ für alle Punkte der Schnittkurve konstant, also, wie bei dem Kreiscylinder, $p + q = 2a$.

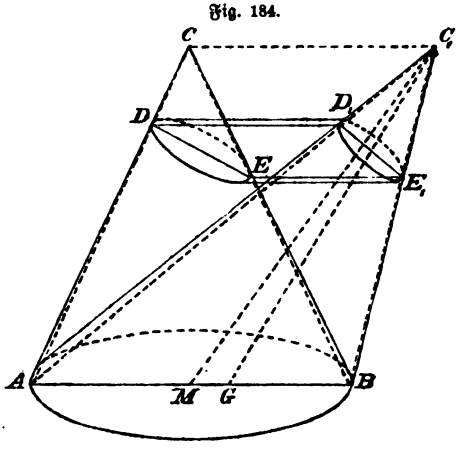
Fig. 183.



Der nur einen Mantel treffende Schnitt durch den senkrechten Kreiskegel giebt also Ellipsen derselben Art, wie der Schnitt durch den Kreiscylinder.

16) In Fig. 184 ist ABC die Zeichnung eines senkrechten Kreiskegels. Aus ihm ist ein schiefer Kreiskegel ABC_1 dadurch abgeleitet, daß jeder Punkt nach rechts verschoben ist, und zwar um eine Strecke, die proportional der senkrechten Entfernung von der Grundebene ist. Der ebene Schnitt DE geht dabei in einen ebenen Schnitt D_1E_1

Fig. 184.



Digitized by Google

über, so daß die Schnittkurve D_1E_1 eine Parallelprojektion von der Schnittkurve DE ist. Demnach ist auch der Schnitt durch den schiefen Kreiskegel eine Ellipse, sobald er nur den einen Mantel trifft.

Folglich: Die Centralprojektion jedes Kreises und jeder Ellipse ist eine Ellipse, sobald der Projektionskegel von der Projektionsebene nur in **einem** Mantel geschnitten wird. Der Schatten einer Kugel, in diesem Sinne geworfen, ist stets eine Ellipse. Die Kugel berührt dabei einen Brennpunkt dieser Ellipse. (Vgl. die obere Kugel in Fig. 183.)

17) **Bemerkungen.** Bei dem schiefen Kreiskegel der Figur 184 ist BC_1 die steilste, AC die am wenigsten steile Gerade der Oberfläche. Das so bestimmte Dreieck ABC_1 heißt der Hauptschnitt des Kegels. In diesem liegt die Mittellinie C_1M des Kegels, die aber nicht seine Achse ist. Als Achse ist vielmehr die Halbierungslinie C_1G des Winkels AC_1B zu betrachten, deren elliptische Normalschnitte von ihr im Centrum getroffen werden. In Bezug auf diese Schnitte handelt es sich um einen geraden elliptischen Kegel.

Die Sätze über Pol und Polare am Kreise, die Sätze von Pascal und Brianchon bleiben auch bei der Centralprojektion des Kreises für die entstehenden Ellipsen erhalten.

Die Ellipse ist von großer Wichtigkeit für die darstellende Geometrie, die Schattenkonstruktion und die Perspektive. In der Mechanik tritt sie bei der Centralbewegung auf, z. B. in der Astronomie als Planetenbahn. Sie spielt eine wichtige Rolle in den Theorien der doppelten Brechung und Polarisation, in der Lehre vom Newtonschen und logarithmischen Potential. Die Scharen konfokaler Ellipsen sind wichtig für die Lehre von den stationären Strömungen der Elektricität, der Wärme und solchen hydrodynamischer Art. Auch in der Kartographie findet die Ellipse Anwendung, ebenso in der Lehre von der Abplattung der Erde.

III. Die Parabel als Specialfall der Ellipse.

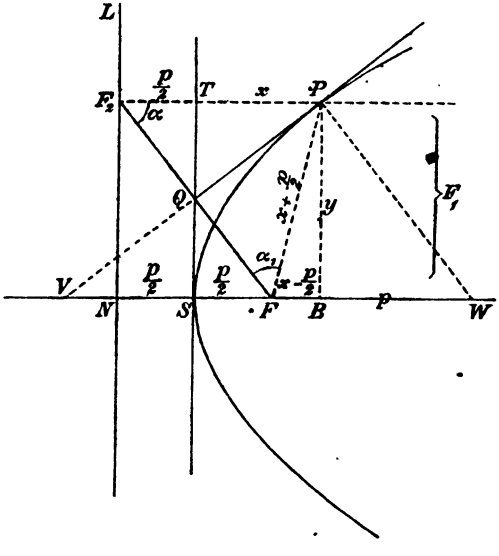
18) Schneidet die Ebene den senkrechten Kreiskegel parallel zu einer Seite, z. B. in Fig. 183 parallel zu PE, so wird die Ellipse unendlich lang, die eine Berührungskugel giebt einen Brennpunkt F_1,

Digitized by Google

der andere Brennpunkt und der Mittelpunkt fallen in unendliche Entfernung. (Vgl. Fig. 186.) Da der eine Brennstrahl unendlich groß ist, hat die Eigenschaft der konstanten Brennstrahlensumme keinen Sinn mehr. Die Konstruktion der Kurve erfolgt aber nach 14a in nachstehender Weise (Fig. 185):

Ist F der Brennpunkt und NL die gerade Linie, die den unendlich groß gewordenen Kreis mit Radius $2a$ in 14a vertritt, so ziehe man beliebig FF_2, sodann $F_2F_1 \parallel NF$, denn der Schnitt F_1 muß im Unendlichen liegen. Sodann trage man Winkel α als α_1 bei F an FF_2 an, so daß das gleichschenklige Dreieck FF_2P entsteht, dann ist P nach Analogie von 14a ein Punkt der Parabel und das Halbierungslot QP ist Tangente in P. So kann man beliebig viele Punkte und Tangenten der Kurve konstruieren. Das Halbierungslot ST für NF ist ebenfalls Tangente der Parabel, die NF in S halbiert. Man nennt NL die Direktrix der Parabel, ST die Scheiteltangente. Errichtet man auf einem beliebigen von F ausgehenden Strahle im Schnittpunkte Q mit der Geraden ST ein Lot, so ist dasselbe eine Tangente der Parabel. Man kann also die Parabel mit Hülfe des Winkeldreiecks ebenso ausschattieren, wie es in Fig. 182 mit der Ellipse geschah. Die Ecke des rechten Winkels wird stets auf ST gelegt, einer seiner Schenkel durch F, der andere giebt die Tangente. (Zum schnellen Skizzieren der Parabel ist diese Konstruktion die bequemste.)

Fig. 185.



19) Fällt man von P aus ein Lot $BP = y$ auf die Achse NF, und setzt man $SB = x$, $TP = x$ und $NF = p$, so ist $F_2P = x + \frac{p}{2}$ und daher auch $FP = x + \frac{p}{2}$, dagegen $FB = x - \frac{p}{2}$, nach

Digitized by Google

Pythagoras also $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(x-\frac{p}{2}\right)^2=y^2$, woraus folgt: $y^2=2px$, An anderer Stelle P_1 der Kurve erhält man ebenso $y_1^2=2px_1$. Durch Division ergiebt sich aus den beiden letzten Gleichungen

$$\frac{y^2}{y_1^2}=\frac{x}{x_1},$$

d. h. die Abstände der Parabelpunkte von der Scheiteltangente verhalten sich wie die Quadrate der Abstände von der Achse.

(In der Sprache der analytischen Geometrie ist $y^2=2px$ die Gleichung der Parabel.) Hierauf beruht eine einfache Konstruktion der Parabel (Lote 1 : 4 : 9 : 16 u. s. w. in den Abständen 1 : 2 : 3 : 4 ...) und ihre Bedeutung als Wurfbahn im luftleeren Raume.

Die Entfernung $NF=p$ bezeichnet man als den Parameter*) der Parabel. Sämtliche Parabeln sind nämlich ähnlich und ihre Dimensionen verhalten sich wie die Größen NF, so daß man NF gewissermaßen als Maßstab (Parameter) der Parabel betrachten kann.

20) Halbierung des Winkels zwischen dem Brennstrahl FP und der Parallelen PF_1 zur Achse giebt die Tangente bezw. Normale der Parabel. Die Tangente PQ trifft die Achse in einem Punkte V so, daß $SV=SB$ ist. (Warum?)

Im Dreiecke VPW, wo PW die Normale der Parabel ist ist $BW=p$, denn $\triangle BPW\cong NF_2F$. Die Projektion der Normale auf die Achse ist also stets gleich dem Parameter. Man bezeichnet diese Projektion als die Subnormale. Auch am Dreieck VPW und seiner Höhe y erkennt man das Bestehen der Gleichung $y^2=2px$, da y mittlere Proportionale zwischen VB und BW ist.

21) Lichtstrahlen, die aus dem Brennpunkte der Parabel kommen, werden von der Parabel parallel zur Achse zurückgeworfen. Solche, die parallel zur Achse einfallen, werden nach dem Brennpunkte hin reflektiert. Fallen solche Strahlen von außen auf die Parabel, so werden sie so reflektiert, als ob sie aus dem Brennpunkte kämen. (Parabolischer Hohlspiegel und Reflektor; der gewölbte parabolische Spiegel.)

*) In der Regel wird p als halber Parameter bezeichnet.

Digitized by Google

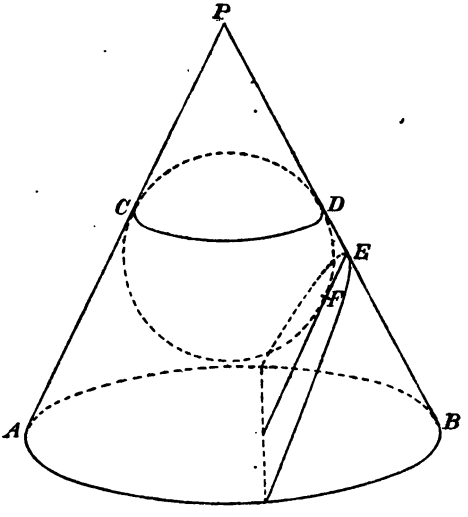
22) Parallelscharen von Sehnen der Parabel haben ihre Halbierungspunkte, weil der Mittelpunkt M unendlich fern liegt, auf einer Parallelen zur Achse. (Vergl. Ellipse.)

Aufgabe. Zu einer gegebenen Parabel die Achse, den Brennpunkt und die Direktrix zu konstruieren.

Auflösung. Man ziehe zwei parallele Sehnen beliebiger Richtung, verbinde ihre Halbierungspunkte, errichte auf der Verbindungslinie ein Lot von Peripherie bis zu Peripherie, und ziehe durch dessen Halbierungspunkt eine Parallele zur Verbindungslinie, so erhält man die Achse. Den Schnittpunkt P der ersten Verbindungslinie mit der Kurve projiziere man als B auf die Achse (Fig. 185), mache $SV = SB$ und ziehe VP, was die Tangente in P giebt. Halbierung des Winkels zwischen der Tangente VP und der Parallelen PF_1 zur Achse giebt den Brennstrahl PF und den Brennpunkt F. Macht man $NS = FS$, so hat man einen Punkt der Direktrix.

23) In Fig. 186 ist die Parabel die Centralprojektion des Kreises CD und aller Kreis- und Ellipsenschnitte des Kegels von P aus auf die Schnittebene. (Auch die Projektion der Kugel von P aus auf die Schnittebene ist eine Parabel, wobei die Kugel den Brennpunkt der Parabelfläche berührt. Jede Parallelprojektion der Ellipse war eine Ellipse. Dies gilt auch von der Ellipse mit unendlich großer Halbachse, d. h. von der Parabel. Also: Jede Parallelprojektion der Parabel ist eine Parabel.

Fig. 186.



Verwandelt man nun den senkrechten Kreiskegel durch Horizontalverschiebung der Spitze wie in Fig. 184 in einen schiefen, so wird jeder Parabelschnitt in die entsprechende Parallelprojektion, d. h. wieder in eine Parabel verwandelt. Folglich: Der Schnitt durch den schiefen Kreiskegel oder den geraden elliptischen Kegel ist eine

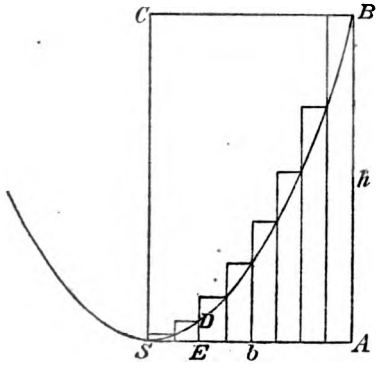
Digitized by Google

Parabel, sobald seine Ebene zu einer Kegelseite parallel ist. — Liegt die Spitze P des Kegels unendlich fern, z. B. auf der Verlängerung von ED in Fig. 186, so geht der Kegel in einen parabolischen Cylinder über.

24) Bei einigen der genannten Sätze bedurfte es keines Beweises, da dieser für die Ellipse bereits geführt war. Alle Sätze über Pol und Polare, auch die Sätze von Pascal und Brianchon, gelten durch Parallel- und Centralprojektion auch von der Parabel. (So ist z. B. die Direktrix die Polare des Brennpunktes, und alle Geraden durch den Brennpunkt haben auf ihr ihren Pol.)

25) In Figur 187 sei in das Rechteck $SABC$ mit Grundlinie b und Höhe h eine Parabel so eingezeichnet, daß AS Tangente und der S der Scheitelpunkt ist. Die Basis ist in n gleiche Teile zerlegt, in den Teilpunkten sind Lote bis zur Parabel errichtet und die Streifen sind zu Rechtecken vervollständigt. Nun ist z. B. nach Nr. 19

Fig. 187.



$$ED : h = SE^2 : SA^2 = SE^2 : b^2,$$

also

$$ED = h\frac{SC^2}{b^2},$$

die einzelnen Lote sind also der Reihe nach

$$h_1 = \frac{h\left(\frac{b}{n}\right)^2}{b^2} = \frac{h}{n^2},\quad h_2 = \frac{h\left(\frac{2b}{n}\right)^2}{b^2} = \frac{h\,2^2}{n^2},\quad h_3 = \frac{h\,3^2}{n^2},\quad \cdots,\quad h_4 = \frac{hn^2}{n^2},$$

die Summe der Rechtecksinhalte ist also, da jede Basis $\frac{b}{n}$ ist,

$$bh\frac{1^2}{n^3} + bh\frac{2^2}{n^3} + bh\frac{3^2}{n^3} + bh\frac{4^2}{n^3} + \cdots + bh\frac{n^2}{n^3}$$

oder

$$bh\,\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3}.$$

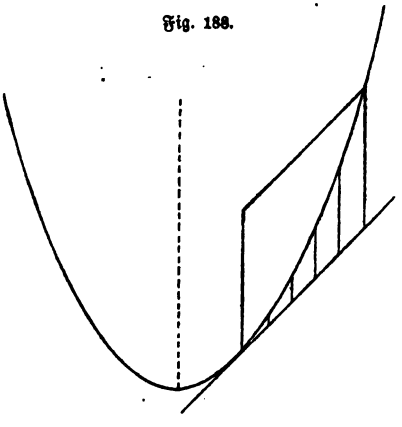
Nimmt man n unendlich groß an, so erhält man nach Arithm. Nr. 38 $F = \frac{1}{3}bh$, zugleich aber sind dabei die übergreifenden Treppenräume verschwunden. Folglich: Die gezeichnete Parabel schneidet vom Rechteck den dritten Teil ab.

(Durch Parallelprojektion gilt dies auch von jedem Parallelo-

Digitized by Google

gramm aus der Tangente und der Parallelen zur Achse, wo die in gleichen Abständen gezogenen Parallelen ebenfalls nach dem Gesetze $1^2 : 2^2 : 3^2 : \cdots$ aufeinander folgen. Vergl. Fig. 188.)

Fig. 188.



So ist man auch imstande beliebige Segmente der Parabel als zwei Drittel eines gewissen Parallelogramms zu berechnen.

Die Parabel ist für die darstellende Geometrie, die Lehre von der Schattenkonstruktion*) und für die Perspektive von Bedeutung. In der Mechanik tritt sie auf als Wurfbahn, in der Astronomie z. B. als Kometenbahn, in der Hydrodynamik als Grenzlinie bei rotierenden Flüssigkeiten innerhalb eines Gefäßes**), in der Festigkeitslehre als Profil für gewisse Körper gleicher Festigkeit, als parabolische Kettenbrückenlinie u. s. w. Eine Hauptrolle aber spielt sie bei der geometrischen Darstellung der Trägheitsmomente. Auf ihre Anwendung bei den Hohlspiegeln war bereits aufmerksam gemacht worden. Die konfokalen Parabeln sind für die Physik von ähnlicher Wichtigkeit, wie die konfokalen Ellipsen.

IV. Die Hyperbel als Kegelschnitt.

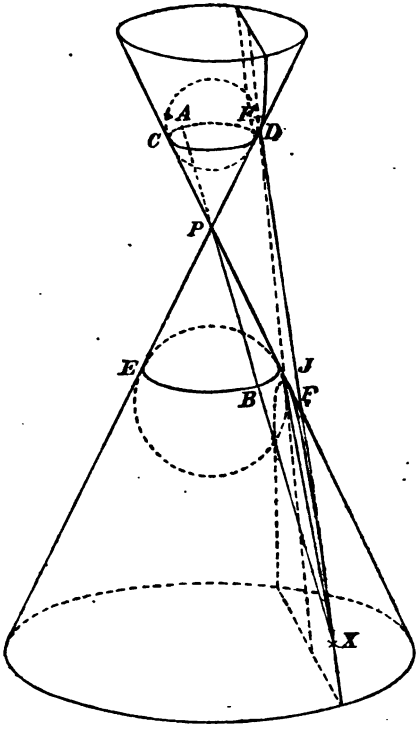
25) Der ebene Schnitt durch den Kegel, der beide Mäntel trifft, giebt als Schnittkurve die sogenannte Hyperbel. In Fig. 189 ist zunächst der senkrechte Kreiskegel mit einem Hyperbelschnitt dargestellt. Wiederum sind in den Kegel Berührungskugeln eingelegt, die ihn in den Kreisen CD und EJ, die Schnittebene in den Brennpunkten F_1 und F berühren. Dabei ist $XA = XF$ (Tangenten von X an die obere Kugel) und $XB = XF_1$ (Tangenten an die untere), folglich $XA - XB = XF - XF_1$, oder $XF - FF_1 = AB$. Die auf der Kegelfläche gemessene Entfernung AB der beiden Parallelkreise ist aber überall dieselbe; bezeichnet man also die Brennstrahlen

*) Der Schatten der auf der Horizontalebene ruhenden Kugel ist eine Parabel, wenn das Kerzenlicht ebenso hoch steht, wie der oberste Punkt der Kugel.

**) Darauf beruht die Theorie des parabolischen Regulators.

Digitized by Google

Fig. 189.

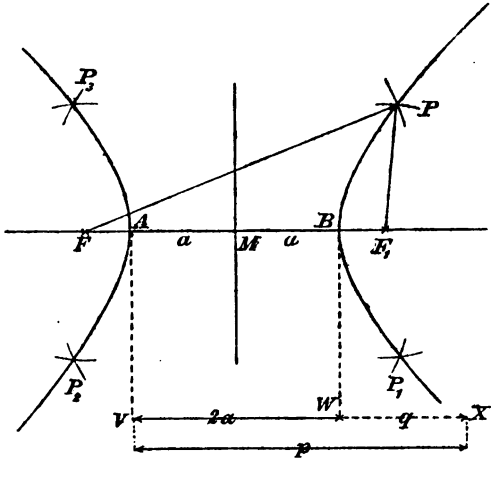


XF und XF_1 mit p bezw. q, die Differenz mit $2a$, so ist die Brennpunkteigenschaft der Hyperbel:

$$p - q = 2a.$$

26) Ist die doppelte Brennweite $FF_1 = 2e$ und die konstante Differenz $2a$, die nach bekanntem Dreiecksatze kleiner als $2e$ sein muß, gegeben, so geschieht die Konstruktion der Hyperbel (Fig. 190) folgendermaßen. Man nimmt X auf der Verlängerung von $VW = 2a$ beliebig an, setzt $VX = p$, $WX = q$ und schlägt um F und F_1 mit p und q auf alle möglichen Arten Bogen, die vier Hyperbelpunkte P, P_1, P_2, P_3 geben, so daß Symmetrie gegen FF_1, und gegen das durch M gezogene Lot stattfindet. Dabei muß WX mindestens gleich $e - a$ sein, VX also mindestens $e + a$. Im Grenzfalle entstehen die Kurvenpunkte A und B auf der Geraden AB. So kann man beliebig viele Hyperbelpunkte konstruieren.

Fig. 190.

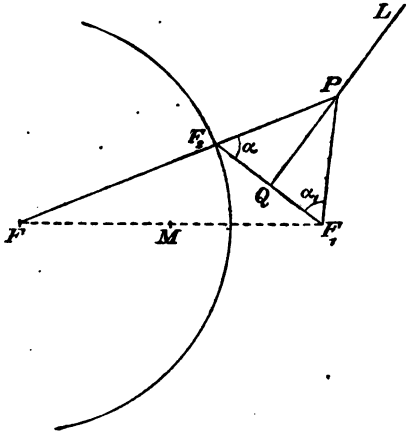


27) Eine andere Konstruktion ist folgende: Man schlägt mit $2a$ (Fig. 191) einen Kreis um F, zieht einen beliebigen

Digitized by Google

Radius FF_2 und seine Verlängerung und verbindet F_2 mit F_1. Trägt man nun den Winkel α als α_1 bei F_1 an F_1F_2 an, so erhält man ein gleichschenkliges Dreieck F_1F_2P, dessen Spitze einer der gesuchten Hyperbelpunkte ist. Es ist nämlich $FP - F_1P = FP - F_2P = FF_2 = 2a$, also $p - q = 2a$.

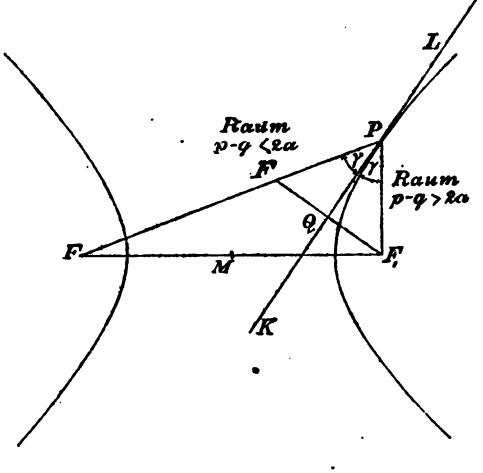
Fig. 191.



28) Auch das Lot auf F_1F_2 im Halbierungspunkte Q giebt den Punkt P und zwar ist es zugleich Tangente der Hyperbel in P.

Die Hyperbel in Fig. 192 trennt nämlich den Raum, wo $p - q > 2a$ ist, von dem Raume ab, wo $p - q < 2a$ ist. Aus Projektionsgründen hat die Tangente (wie beim Kreise) nur einen Punkt mit der Hyperbel gemein, sie liegt also ganz in dem Raume $p - q < 2a$; nur für den Berührungspunkt ist $p + q = 2a$, also gleich der größten möglichen Differenz der Strahlen FP und F_1P für die Punkte P der Geraden. Nach Geometrie Nr. 28 befindet sich P in Bezug auf KL in dieser Lage, wenn $\gamma = \gamma_1$ ist. Folglich ist das Lot QP in der That die Tangente, und so folgt der Satz: Die Halbierungslinie des Winkels der Brennstrahlen giebt die Tangente der Hyperbel.

Fig. 192.

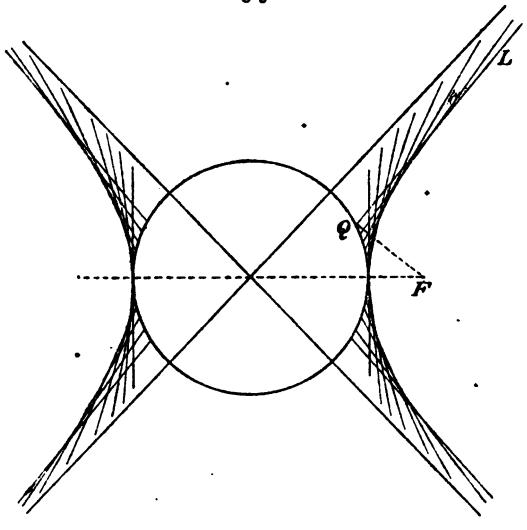


Folglich durchschneiden sich Ellipsen und Hyperbeln mit denselben Brennpunkten rechtwinklig. Auch werden die von F an die Hyperbel gezogenen Strahlen von ihr so reflektiert, als ob sie aus F_1 kämen.

Digitized by Google

29) Zieht man in Fig. 191 von F_1 aus alle möglichen Geraden F_1F_2 nach dem Kreise F, so liegen alle Halbierungspunkte Q auf einem Kreise um M mit Radius a. Folglich gilt auch folgende Konstruktion der Hyperbel: Zieht man von einem Punkte F außerhalb des Kreises an ihn zahlreiche Gerade FQ und errichtet man auf jeder in Q ein Lot, so schattieren die Lote eine Hyperbel aus. Fig. 193 zeigt, wie man so mit Hülfe des Winkeldreiecks ohne Kurvenlineal die Hyperbel ausschattieren kann.

Fig. 193.



30) Bei den Konstruktionen 28) und 29) kommt mehrfach der Fall vor, daß P in unendliche Entfernung fällt, weil $\alpha = \alpha_1 = 90^0$ ist (Fig. 194). Dann berührt die Tangente QP die Kurve erst in unendlich großer Entfernung. Eine solche Tangente bezeichnet man als Asymptote*). Sie ist die durch M gehende Tangente. (Warum?) Solcher Asymptoten hat jede Hyperbel zwei.

Errichtet man (Fig. 195) in B auf der Achse AB ein Lot bis zur Asymptote, so ist $\triangle MBH \cong MQF_1$, also $MH = MF_1$. Folglich: Man findet die Asymptoten einer Hyperbel, indem man auf der Achse im Scheitel ein Lot errichtet und mit der Brennweite um den Mittelpunkt einen Kreis schlägt. Durch die Schnittpunkte beider gehen die Asymptoten.

31) Setzt man $MB = a$, $MF_1 = e$, so ist $BH = \sqrt{e^2 - a^2}$, so daß, wenn $BH = b$ gesetzt wird, $b = \sqrt{e^2 - a^2}$ ist, während bei

*) $\dot{\alpha}$ = nicht, $\sigma\grave{\upsilon}\nu$ = zusammen, $\pi\acute{\iota}\pi\tau\omega$ = fallen, also „nicht zusammen fallen". Der Name soll also Folgendes sagen: Die Tangente kommt der Kurve immer näher, sogar unendlich nahe, fällt aber doch im Endlichen nicht ganz mit ihr zusammen.

Digitized by Google

Fig. 194.

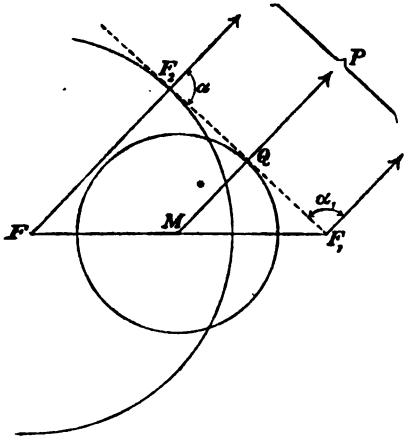
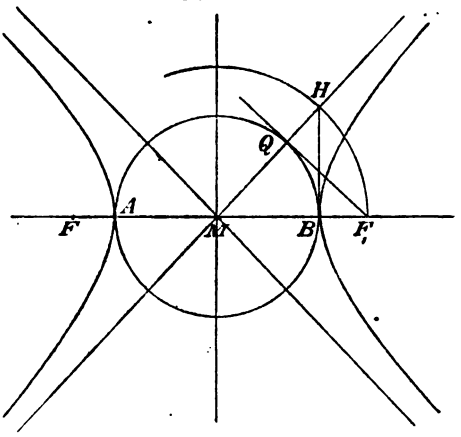


Fig. 195.



der Ellipse $b = \sqrt{a^2 - e^2}$ war. [Man könnte hier schreiben $b_1 = \sqrt{e^2 - a^2} = \sqrt{-1}\sqrt{a^2 - e^2} = i\sqrt{a^2 - e^2} = ib$, und die Hyperbel als Ellipse mit imaginärer kleiner Achse betrachten.] Man kann $b = \sqrt{e^2 - a^2}$ als Länge der (nicht vorhandenen) Halbachse bezeichnen und $\frac{b}{a}$ als das Achsenverhältnis betrachten. Ist $a = b$, so nennt man die Hyperbel eine gleichseitige, ähnlich wie man den Kreis als die „gleichachsige" oder gleichseitige Ellipse betrachten könnte. Die Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel stehen auf einander senkrecht.

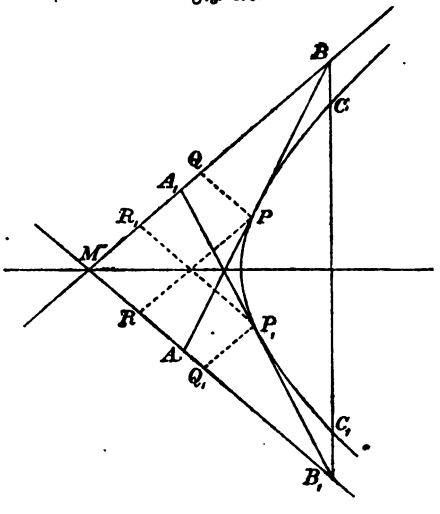
Durch verschiedene Lage der Schnittebenen kann man Hyperbeln von beliebigem Achsenverhältnis aus dem senkrechten Kreiskegel Fig. 189 herausschneiden, die sämtlich Centralprojektionen von einander sind. Fällt der eine Brennpunkt in unendliche Entfernung, so erhält man wieder die Parabel. Liegt aber die Kegelspitze P unendlich fern, so steht über der Hyperbel statt eines hyperbolischen Kegels ein hyperbolischer Cylinder. Da nach der ersten Definition auch die durch diesen gelegten Schnitte Hyperbeln sind, so folgt: Jede Hyperbel geht durch Parallelprojektion in eine andere Hyperbel über.

33) Daraus ergeben sich zahlreiche andere Folgerungen, die zum Teil der Symmetrie jeder Hyperbel und ihrer Asymptoten gegen die beiden Achsen entspringen. Weil z. B. die zu jeder Achse parallelen Sehnen durch die andere Achse halbiert sind, so folgt: Parallele Sehnenscharen haben ihre Halbierungspunkte auf einem Durchmesser. Schneidet dieser die Hyperbel, so sind die

Digitized by Google

Tangenten in den Schnittpunkten parallel zur Sehnenschar. Ebenso folgt aus den entsprechenden symmetrischen Figuren: Die Außenstücke jeder Sehne bis zu den Asymptoten sind einander gleich. Jede Tangente von Asymptote zu Asymptote gemessen ist im Berührungspunkte halbiert.

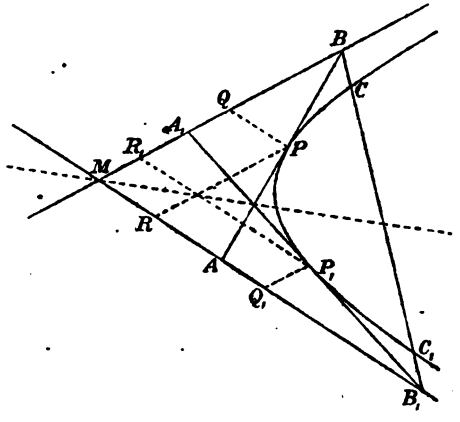
Fig. 196.



Aus dem ersteren Satze ergiebt sich eine einfache Konstruktion der Hyperbel aus den Asymptoten und einem Punkte C. Man legt durch C ein Strahlenbüschel und macht auf jedem Strahle BB_1 das Stück B_1C_1 gleich BC. (Fig. 197.) So findet man beliebig viele Punkte der Hyperbel.

34) Die symmetrische Fig. 196 geht durch die schräge Parallelprojektion in die unsymmetrische 197 über. Dabei verwandeln sich aber gleiche Flächen in andere, unter sich ebenfalls gleiche Flächen. Da nun in Fig. 196 die Dreiecke ABM und A_1B_1M aus Symmetriegründen flächengleich sind, so sind in Fig. 197 auch die entsprechenden von den Tangenten und Asymptoten gebildeten Dreiecke ABM und A_1B_1M flächengleich. Nun darf aber BB_1 in Fig. 197 als eine ganz beliebige Gerade angesehen werden, so daß also neben der beliebigen Tangente AB eine zweite ganz beliebige A_1B_1 gezogen ist. Das Gesagte gilt also von dem Dreieck ABM und jedem beliebig hinzugefügten A_1B_1M derselben Art. Folglich:

Fig. 197.

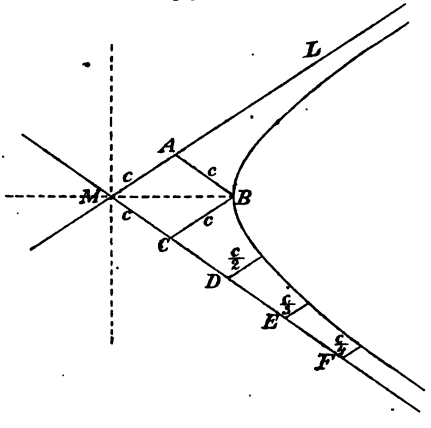


Digitized by Google

Das von der Tangente und den Asymptoten der Hyperbel gebildete Dreieck hat konstanten Inhalt. — Verbindet man die Schnittpunkte A und B der Tangente mit denen der zu ihr parallelen Tangente am andern Hyperbelarme, so erhält man ein Konjugierten-Parallelogramm der Hyperbel. Dasselbe hat vierfachen Flächeninhalt, wie jedes der besprochenen Dreiecke. Folglich: Die Konjugierten-Parallelogramme der Hyperbel haben sämtlich denselben Flächeninhalt.

35) Dasselbe gilt von den Parallelogrammen $PQMR$ und $P_1Q_1M_1R_1$ der beiden Figuren, die halb so groß sind, wie die zugehörigen Dreiecke ABM und A_1B_1M. Daraus ergiebt sich folgende Hyperbelkonstruktion (Fig. 198):

Fig. 198.



Man ziehe, wenn die Asymptoten und ein Hyperbelpunkt B (z. B. der Scheitel) gegeben sind, $BC \parallel ML$, trage $MC = c$ von C aus mehrfach hintereinander auf der Asymptote ab und lege durch die Teilpunkte Parallele zu CB, die der Reihe nach die Länge $\frac{c}{2}$, $\frac{c}{3}$, $\frac{c}{4}$ u. s. w. haben. So erhält man beliebig viele Punkte der Hyperbel.

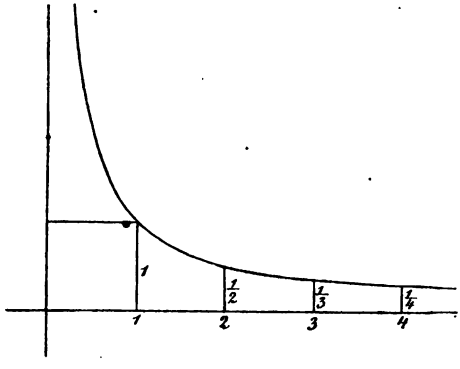
Praktische Anwendung findet dies bei der gleichseitigen Hyperbel, die zur Veranschaulichung des Mariotteschen Gesetzes und zur Berechnung der Expansionsarbeit dient. Hier ist jedes Lot $y = \frac{1}{x}$, wenn x der Horizontalabstand von der senkrechten Asymptote ist. Vergl. Figur 86 und die zugehörigen Erläuterungen und Fig. 199.

36) Verwandelt man den senkrechten Kreiskegel (Fig. 189) durch Horizontalverschiebung der Spitze in einen schiefen Kreiskegel, d. h. in einen geraden elliptischen Kegel, so geht der Hyperbelschnitt in die entsprechende Parallelprojektion, d. h. wieder in einen Hyperbelschnitt über. Folglich:

Jede Centralprojektion des Kreises, bei der beide

Digitized by Google

Fig. 199.



Mäntel des Projektionskegels von der Projektionsebene geschnitten werden, giebt eine Hyperbel.

Folglich gelten die Sätze über Pol und Polare am Kreise, ebenso der Pascalsche und Brianchonsche Satz von jeder Hyperbel. Der Schatten einer Kugel, die auf der Horizontalebene liegt, ist ein Hyperbelarm, sobald das Licht tiefer steht, als der höchste Punkt der Kugel. Die Kugel berührt die Ebene im Brennpunkte des Hyperbelarms. (Vgl. Fig. 189.)

Um von einem Punkte außerhalb der Hyperbel Tangenten an dieselbe zu legen, verfahre man wie bei dem Kreise (Geom. Nr. 65, Fig. 46). Diese Konstruktion gilt überhaupt von allen Kegelschnitten. Ist eine Hyperbel gegeben, so findet mau ihre Achsen, Brennpunkte und Asymptoten folgendermaßen: Die Halbierungspunkte zweier paralleler Sehnen bestimmen einen Durchmesser, dessen Halbierungspunkt der Mittelpunkt der Hyperbel ist. Mit Hülfe eines um diesen geschlagenen Kreises findet man die beiden Achsenrichtungen. (Symmetriel) Jetzt zeichne man den Berührungskreis der Figur 193. Von einem Punkte Q dieses Kreises aus lege man eine Tangente an die Hyperbel. Das in Q auf der Tangente errichtete Lot schneidet die Hauptachse im Brennpunkte F. (Fig. 193.) Die Berührungspunkte der Tangenten, die sich von F aus an dem Hülfskreis (Fig. 193) legen lassen, gehören ebenso, wie M, den Asymptoten an.

Die Hyperbel ist von Bedeutung für die Mechanik. Ist z. B. die Geschwindigkeit, mit der ein Komet die Sonnennähe passiert, größer, als ein gewisser Grenzwert, so ist seine Bahn eine Hyperbel. Gewisse graphische Darstellungen der Stoßtheorie führen auf die Hyperbel. Der Flächeninhalt der gleichseitigen Hyperbel veranschaulicht den Wert der natürlichen Logarithmen $\left(\text{denn } \overset{x_1}{F}_{x} = \lg \frac{x_1}{x}\right)$. Sie dient zur Berechnung der Kompressions- und Expansionsarbeit unter Zugrundelegung des Mariotteschen Gesetzes. Die Scharen konfokaler Hyperbeln sind von Wichtigkeit für die Theorie des logarithmischen Potentials und gewisse Probleme über stationäre Strömung der Elektricität, der

Digitized by Google

Wärme und der Flüssigkeiten. Ihre Bedeutung für die Geometrie, Stereometrie, für die darstellende Geometrie, Schattenlehre und Perspektive ist eine ebenso große, wie die der anderen Kegelschnitte.

V. Allgemeines über die Kegelschnitte.

37) Weil die Sätze von Pascal und Brianchon von allen Kegelschnitten gelten, so kann man folgende Konstruktion ausführen:

a) Einen Kegelschnitt aus 5 gegebenen Punkten mit dem Lineal allein zu konstruieren. (Oder: aus 4 Punkten und der Tangente in einen von ihnen; aus 3 Punkten und der Tangente in zweien von ihnen.)

b) Einen Kegelschnitt aus 5 gegebenen Tangenten mit dem Lineal allein zu konstruieren. (Oder aus 4 Tangenten und dem Berührungspunkte auf einen von ihnen; aus 3 Tangenten und dem Berührungspunkte auf zweien von ihnen.)

Man kann nämlich die Fünfecke auf beliebig viele Arten zu Pascalschen oder Brianchonschen Sechsecken vervollständigen. Über diese und andere Konstruktionen vergleiche des Verfassers „Einführung".

Suche zu beweisen, daß der geometrische Ort aller Punkte, die von zwei gegebenen Kreisen gleiche Entfernung haben, stets ein Kegelschnitt $p \pm q = 2a$ (in einigen speciellen Fällen eine Parabel) ist.

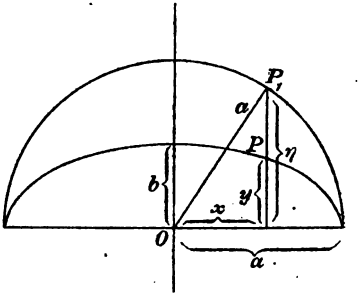
38) **Aufgabe.** Die Hauptgleichungen der Kegelschnitte zu finden.

a) Für die Parabel ist bereits gefunden

$$y^2 = 2px.$$

b) Ellipse. Für jeden Punkt P_1 des mit Radius ϱ um den Nullpunkt geschlagenen Kreises (Fig. 200) ist $x^2 + \eta^2 = a^2$. Wird jedes η im Verhältnis $\frac{b}{a}$ verkleinert, so wird die neue Höhe $y = \eta \frac{b}{a}$, so daß $\eta = y \frac{a}{b}$ ist.

Fig. 200.

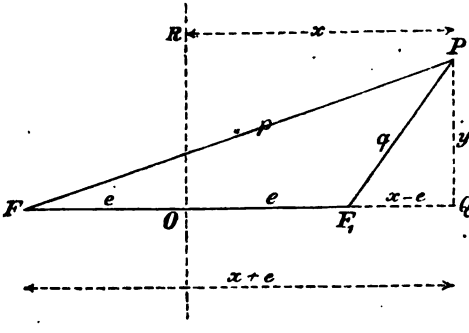


Für jeden Punkt P der Ellipse ist also, wie die Einsetzung ergiebt,

$$x^2 + \left(y\frac{a}{b}\right)^2 = a^2, \quad \text{oder} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Digitized by Google

Fig. 201.



c) Ellipse und Hyperbel. Setzt man in Fig. 201 $FO = OF_1 = e$, den Abstand RP jedes Kurvenpunktes P von der senkrechten Achse gleich x, den Abstand QP von der horizontalen gleich y, so daß

$$p = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}$$

und

$$q = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$$

ist, so gehen die Gleichungen für beide Kurven

$$p \pm q = 2a$$

über in

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a,$$

oder durch beiderseitige Quadrierung in

$$[(x+e)^2 + y^2] + [(x-e)^2 + y^2]$$
$$\pm 2\sqrt{(x^2 + y^2 + e^2) + 2xe} \cdot \sqrt{(x^2 + y^2 + e^2) - 2xe} = 4a^2,$$

oder

$$x^2 + y^2 + e^2 \pm \sqrt{(x^2 + y^2 + e^2)^2 - 4x^2e^2} = 2a^2,$$

also

$$\pm \sqrt{(x^2 + y^2 + e^2)^2 - 4x^2e^2} = 2a^2 - (x^2 + y^2 + e^2),$$

oder durch beiderseitige Quadrierung in

$$(x^2 + y^2 + e^2)^2 - 4x^2e^2 = 4a^4 + (x^2 + y^2 + e^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2 + e^2).$$

Durch Hebung u. s. w. folgt

$$-x^2e^2 = a^4 - a^2x^2 - a^2y^2 - a^2e^2$$

oder

$$x^2(a^2 - e^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)$$

und nach beiderseitiger Division durch die rechte Seite

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} = 1.$$

Diese Gleichung gilt für beide Kurven. Bei der Ellipse ist aber $a^2 - e^2$ positiv und kann gleich b^2 gesetzt werden, bei der Hyperbel ist $a^2 - e^2$ negativ und kann gleich $-b^2$ gesetzt werden. Dann ist die Ellipsengleichung, wie vorher

Digitized by Google

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

dagegen die Hyperbelgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Für die gleichseitige Hyperbel ist $b = a$, also

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Dagegen ergiebt sich für die gleichseitige Hyperbel in anderer Stellung (Mariottesche Kurve) $xy = c$ oder $y = \frac{c}{x}$ (z. B. wenn $c = 1$ ist $xy = 1$ und $y = \frac{1}{x}$), wo c das konstante Rechteck bedeutet. (Vergl. Fig. 199.)

39) Mit diesen Gleichungen rechnet man ebenso, wie mit der Kreisgleichung. So ergiebt sich z. B. durch einfache Betrachtungen Folgendes:

Die Tangente im Punkte $x_1 y_1$ der Parabel $y^2 = 2px$ oder $yy = p(x + x)$ hat die Gleichung

$$yy_1 = p(x + x_1);$$

die Tangente im Punkte der Ellipse bezw. Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ oder $\frac{xx}{a^2} \pm \frac{yy}{b^2} = 1$ hat die Gleichung

$$\frac{xx_1}{a^2} \pm \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Dieselben Gleichungen gelten für die Polaren des Punktes $x_1 y_1$, wenn derselbe nicht auf der Kurve liegt. Für die Ellipse läßt sich dies nach der bei Figur 200 angewandten Methode vom Kreise aus beweisen. Für die Parabel folgt es aus Fig. 185.

40) Bedeutung der Worte Parabel, Ellipse, Hyperbel.

Das griechische Wort παραβολή bedeutet Nebeneinanderstellung, Vergleichung und in mathematischer Hinsicht auch Gleichsetzung.

Das Verbum ἐκλείπω bedeutet im Infinitiv „weglassen". Daraus ist das Wort Eklipse oder Ellipse, d. h. „Weglassung" abgeleitet. (Man denke z. B. an die Eklipsen des Mondes und der Sonne, d. h. an die Verfinsterungen, die nur stattfinden können, wenn beide Körper in der scheinbaren Sonnenbahn zusammentreffen oder sich in ihr in Diametralstellung befinden. Die Sonnenbahn wird daher Ekliptik genannt, was als der geometrische Ort der Finsternisse aufgefaßt werden kann.)

Digitized by Google

Das Wort ὑπερβολή bedeutet ein Übertreffen, z. B. in der Mathematik „das Hinausgehen über einen gewissen Wert".

Den Grund zu den entsprechenden Benennungen der Kegelschnitte erkennt man an ihren Scheitelgleichungen.

Die der Parabel ist nämlich

a) $$y^2 = 2px.$$

Die Mittelpunktsgleichung der Ellipse ist

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1.$$

Verschiebt man hier den Nullpunkt des Koordinatensystems auf der X-Achse um $(-a)$, so tritt an Stelle jeder Abscisse ξ eine andere, $x = \xi + a$, so daß $\xi = x - a$ ist. Dagegen ist die Ordinate $y = \eta$ unverändert geblieben. Die Kurvengleichung geht also über in die Scheitelgleichung

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

oder in

b) $$y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2;$$

wo $\frac{b^2}{a} = p$ gesetzt ist.

Die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel ist

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 1.$$

Hier verschiebe man den Nullpunkt um $+a$ (um an den Scheitel von entsprechender Krümmung zu kommen). Man erhält die Scheitelgleichung

$$\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

oder

c) $$y^2 = \frac{2b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x = 2px + \frac{p}{a}x^2.$$

Für die Parabel ist also $y^2 = 2px$, für die Ellipse $y^2 < 2px$, für die Hyperbel $y^2 > 2px$, so daß die Gleichsetzung, das Weglassen eines gewissen Wertes und das Hinausgehen über einen gewissen Wert leicht erkennbar sind.

41) Die neuen, p enthaltenden Gleichungen der Ellipse und der Hyperbel gehen in die der Parabel über, sobald $a = \infty$ gesetzt wird. Die Größe p kann als eine Art von Parameter betrachtet werden. Für

Digitized by Google

die Parabel ist ihre Bedeutung bereits erklärt worden. Für die Ellipse und die Hyperbel kann p mit Hülfe der Proportion $a : b = b : p$, die mit der Gleichung $p = \frac{b^2}{a}$ übereinstimmt, leicht konstruiert werden. Bei allen drei Kegelschnitten ist p die positive Ordinate im Brennpunkte (bezw. in beiden Brennpunkten) der Kurve. Man erkennt dies, wenn man in die Gleichungen $y^2 = 2px$ und $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ die Werte $x = \frac{p}{2}$ bezw. $x = \pm e$ einsetzt und y berechnet.

42) Der geometrische Ort eines Punktes, dessen Entfernungen von einem gegebenen Punkte (F) und einer gegebenen Geraden (LN) ein konstantes Verhältnis $\frac{m}{n}$ haben, ist ein Kegelschnitt, und zwar eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem $\frac{m}{n} \lessgtr 1$ ist.

Beweis. In Fig. 185 sei $SF : NS = m : n$, ebenso $FP : F_2P = m : n$. Wird also $NF = l$ gesetzt, so ist $FP = \sqrt{(x - SF)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x - \frac{m}{m+n}l\right)^2 + y^2}$ und $F_2P = x + NS = x + \frac{n}{m+n}l$. Die Gleichung $FP^2 = \frac{m^2}{n^2}F_2P^2$ geht also über in

$$\left(x - \frac{m}{m+n}l\right)^2 + y^2 = \frac{m^2}{n^2}\left(x + \frac{n}{m+n}l\right)^2,$$

was sich umformen läßt zu

$$y^2 = \frac{2lm}{n}x + x^2\left(\frac{m^2}{n^2} - 1\right).$$

Nach Obigem ist dies die Scheitelgleichung eines Kegelschnitts, und zwar eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem der Faktor von x^2 negativ, oder Null, oder positiv ist. Dabei wird $p = \frac{lm}{n}$ und $a = \frac{n^2}{m^2 - n^2}p = \frac{lmn}{m^2 - n^2}$.

[43) Dreht sich ein Kegelschnitt um eine seiner Achsen, so entsteht ein Drehungs-Ellipsoid oder Drehungs-Paraboloid oder Drehungs-Hyperboloid, von denen das letztere einmantelig oder zweimantelig sein kann, je nach Wahl der Drehungsachse. Bei sämtlichen diesen Körpern ist die aus der Höhe y berechnete Querschnittsfläche q_y höchstens vom 2ten Grade, also läßt sich bei allen der Inhalt nach der Simpson-Regel oder der Summenformel berechnen.

Digitized by Google

Dasselbe gilt von ihren Cavalierischen Erweiterungen, bei denen die Kreisquerschnitte in ähnliche Ellipsen übergehen.

Auch über diese Körper bietet die „Einführung" Übungsaufgaben. Die einfachste Inhaltsformel hat das Drehungsparaboloid. Aus $y : h = x^2 : r^2$ (in Fig. 202) folgt nämlich $y : h = x^2\pi : r^2\pi$, also Querschnitt $q_y = x^2\pi y = \frac{r^2\pi y}{h} = \frac{G}{h} y$. Da der Querschnitt ein solcher ersten Grades ist, so ergiebt sich nach Nr. 64 als Inhalt $J = \frac{G}{h}\frac{h^2}{2} = \frac{1}{2} Gh$, d. h. die Hälfte des Cylinders. (Vgl. Fig. 202.)

Fig. 202.

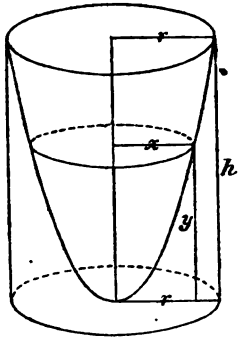
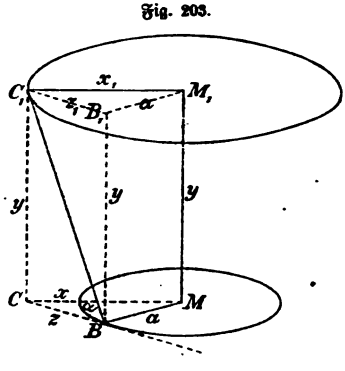


Fig. 203.



Daß der in Fig. 115 dargestellte Körper, der durch Drehung einer Geraden um eine sie schräg kreuzende Achse entsteht, ein Rotationshyperboloid ist, ergiebt sich folgendermaßen: MM_1 in Fig. 203 sei die Drehungsachse, BC_1 die sie kreuzende Gerade, BC ihre Projektion auf die Grundfläche, in der $MB = a$, das gemeinschaftliche Lot der Geraden MM_1 und BC_1 liegt, so daß BC Tangente ist. Dann ist $x^2 - z^2 = a^2$, also, da $z = \frac{y}{\tan\alpha}$ ist, $x^2 - \frac{y^2}{\tan^2\alpha} = a^2$, oder

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(a\tan\alpha)^2} = 1.$$

Dies stimmt überein mit der Gleichung einer Hyperbel mit den Halbachsen a und $b = a\tan\alpha$, deren Asymptotenneigung also gleich α ist. D. h. die Entfernung x der Geraden BC_1 von der Achse wird für jede Höhe y ebenso berechnet, wie die Abscisse der genannten Hyperbel. Bei der Rotation gilt dies von jeder Lage der Geraden BC_1, so daß es sich nur um ein Drehungshyperboloid handeln kann.

Übungsmaterial über die Kegelschnittsflächen bietet die „Einführung in das stereometrische Zeichnen".]

Digitized by Google

Anhang.

I. Eine Hauptaufgabe der mathematischen Geographie.

Zunächst werde folgende Hülfsaufgabe gelöst: Aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel einer dreiseitigen Ecke die dritte Seite zu berechnen.

Auflösung. $D(ABC)$ in Fig. 204 sei die Ecke, von der die Seiten β und γ und der in der Normalebene von h gemessene Winkel φ gegeben sein mag. Aus den Gleichungen

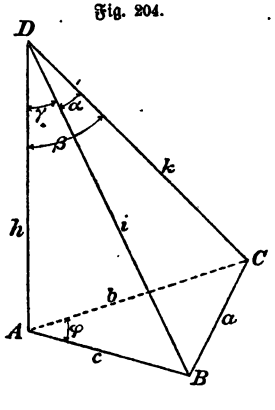


Fig. 204.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\varphi$$

$$a^2 = i^2 + k^2 - 2ik\cos\alpha$$

folgt

$$i^2 + k^2 - 2ik\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\varphi$$

oder

$$(i^2 - c^2) + (k^2 - b^2) - 2ik\cos\alpha = -2bc\cos\varphi$$

oder, da $i^2 - c^2 = h^2$ und $k^2 - b^2 = h^2$ ist,

$$h^2 - ik\cos\alpha = -bc\cos\varphi,$$

oder

$$\frac{h}{k}\cdot\frac{h}{i} - \cos\alpha = -\frac{b}{k}\cdot\frac{c}{i}\cos\varphi,$$

das heißt

$$\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha = -\sin\beta\sin\gamma\cos\varphi,$$

oder endlich

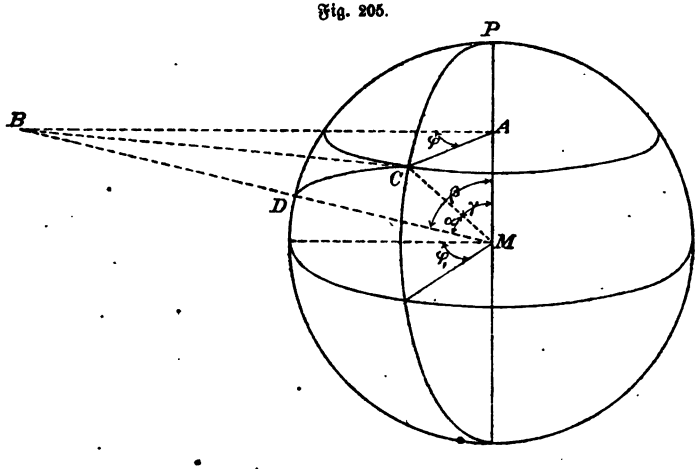
$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\varphi.$$

Digitized by Google

Mit dieser Formel läßt sich die Aufgabe lösen, die sphärische Entfernung zweier Orte der Erdkugel (gemessen längs des größten Kreises) zu finden, wenn ihre Lage nach Länge und Breite gegeben ist.

Auflösung. C und D in Fig. 205 seien die beiden Orte, β^0 die Poldistanz von D (also $90^0 - \beta^0$ die nördliche Breite), γ^0 die

Fig. 205.



Poldistanz von C (also $90^0 - \gamma^0$ die nördliche Breite), $\varphi_1{}^0$ der Längenunterschied beider Orte. Durch C lege man die Horizontalebene CAB, wo $\varphi = \varphi_1$ ist. Dann ist wie oben für die Ecke $M(ABC)$ der Winkel $CMB = \alpha$ zu bestimmen aus

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\varphi.$$

Die sphärische Entfernung ist $\widehat{DC} = r \cdot \widehat{\alpha} = r\pi\frac{\alpha^0}{180^0}$.

II. Einige Bemerkungen über Maxima und Minima.

1) **Aufgabe.** In ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck mit Kathete a ein Rechteck von gegebener Fläche F einzuzeichnen, dessen Seiten parallel zu den Katheten sind.

Auflösung. Ist x die gesuchte Grundlinie, so ist $a - x$ die gesuchte Höhe. Der Inhalt soll sein

$$x(a - x) = F,$$

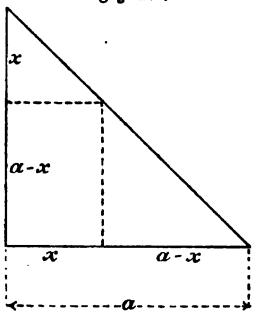
Digitized by Google

also ist

$$x^2 - ax = -F,$$

d. h. $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - F}.$

Fig. 206.



Die Lösung ist auf zweierlei Art möglich, sobald $F < \left(\frac{a}{2}\right)^2$ ist, dagegen nur auf eine Art, wenn $F = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ ist; sie ist aber unmöglich (imaginär), sobald $F > \left(\frac{a}{2}\right)^2$ ist, denn dann steht unter der Wurzel Negatives. F darf also höchstens gleich $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ sein. In diesem Grenzfalle ist $x = \frac{a}{2} \pm 0 = \frac{a}{2}$. Folglich:

Das Quadrat ist das größte Rechteck, welches sich in dieser Weise einzeichnen läßt, es ist zugleich das größte Rechteck, welches aus der in zwei Teile zu zerlegenden Geraden a erzielt werden kann.

Aufgaben. Suche in entsprechender Weise zu zeigen, daß das größte einem gleichschenkligen Dreieck einzubeschreibende Rechteck, welches auf der Basis steht und die oberen Ecken auf den Schenkeln hat, dasjenige von halber Höhe ist; daß dasselbe bei einem beliebigen Dreieck von dem einbeschriebenen Parallelogramm von halber Höhe gilt, dessen eines Seitenpaar zur Mittellinie parallel ist; daß das größte einem Quadrat einzubeschreibende Rechteck, dessen Seiten den Diagonalen parallel sind, das Quadrat ist (welches die Eckpunkte in den Halbierungspunkten der Seiten hat); daß das Entsprechende von dem größten einem Parallelogramm einzubeschreibenden Parallelogramm (mit Seiten, die den Diagonalen parallel sind) gilt.

2) **Aufgabe.** Einem Kreise vom Durchmesser d das Rechteck vom größten Umfange einzuzeichnen.

Auflösung. Die eine Seite sei x, dann ist die andere $\sqrt{d^2 - x^2}$, der Umfang also $2\,(x + \sqrt{d^2 - x^2}) = u$. Hieraus ergiebt sich $x = \frac{u \pm \sqrt{8d^2 - u^2}}{4}$, was bei dem Grenzwerte $u = d\sqrt{8}$ noch reell bleibt. Dabei ist $x = \frac{d\sqrt{8}}{4} = d\sqrt{\frac{1}{2}}$, es handelt sich also um das Quadrat.

Suche die größte Rechtecksfläche im Kreise zu bestimmen. (Es ergiebt sich ebenfalls das Quadrat.) Für die Ellipse ergiebt sich durch Parallelprojektion als größtes einzuschreibendes Parallelogramm das-

Digitized by Google

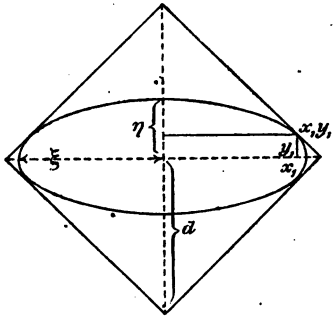
jenige, dessen Ecken in den Berührungspunkten jedes Konjugierten-parallelogramms liegen, so daß unzählige Lösungen möglich sind, bei denen es sich aber um denselben Inhalt handelt.

In ähnlicher Weise lassen sich quadratische Säulen von größter Oberfläche oder von größtem Inhalt in die Kugel eintragen, und dasselbe läßt sich mit regelmäßigen 3-, 5-, 6-seitigen Säulen u. s. w. versuchen.

3) **Aufgabe.** Die größte mögliche Ellipsenfläche in ein Quadrat einzuzeichnen.

Auflösung. Die Ellipsentangente im Punkte $x_1 y_1$ der Fig. 207 hat die Gleichung $\frac{x x_1}{\xi^2} + \frac{y y_1}{\eta^2} = 1$, woraus für $y = 0$ und $x = 0$ folgt $\frac{x x_1}{\xi^2} = 1$ und $\frac{y y_1}{\eta^2} = 1$, d. h. $dx_1 = \xi^2$, $dy_1 = \eta^2$, wenn d die Halbdiagonale des Quadrats ist. (ξ und η sind also mittlere Proportionalen zu d und x_1 bezw. d und y_1.) Daraus folgt $(x_1 + y_1)\, d = \xi^2 + \eta^2 = d^2$. Die Ellipsenfläche aber ist $\xi \eta \pi = F$, so daß $\xi \eta = \frac{F}{\pi}$ ist. Aus

Fig. 207.



$$\xi^2 + \eta^2 + 2\xi\eta = d^2 + \frac{2F}{\pi}$$

und

$$\xi^2 + \eta^2 - 2\xi\eta = d^2 - \frac{2F}{\pi}$$

folgt

$$\xi + \eta = \sqrt{d^2 + \frac{2F}{\pi}}$$

und

$$\xi - \eta = \sqrt{d^2 - \frac{2F}{\pi}},$$

woraus die Achsen ξ und η für jede geforderte Ellipsenfläche folgen. Die Grenzbedingung aber ist $\frac{2F}{\pi} < d^2$, d. h. $F < \frac{d^2\pi}{2}$, d. h. $< \left(d\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 \pi$, d. h. kleiner als die Fläche des einbeschriebenen Kreises, der demnach die größte mögliche Ellipsenfläche giebt.

Durch Parallelprojektion folgt, daß die größte in ein Parallelogramm einzubeschreibende Ellipse diejenige ist, die in den Halbierungspunkten der Seiten berührt.

4) **Aufgabe.** Welches ist der kleinste Rhombus, dessen Seiten sich durch die Ecken eines gegebenen Quadrats legen lassen?

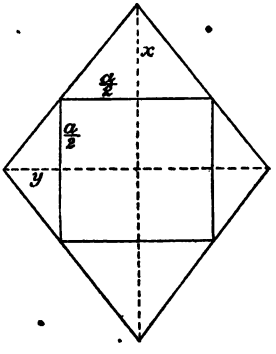
Digitized by Google

Auflösung. Nach Figur 208 ist $x : \frac{a}{2} = \frac{a}{2} : y$, also $y = \frac{a^2}{4x}$. Es handelt sich darum, den Dreiecksüberschuß $ax + ay$ oder $a\left(x + \frac{a^2}{4x}\right)$ möglichst groß zu machen. Man setze ihn gleich F, so daß $x + \frac{a^2}{4x} = \frac{F}{a}$ oder

$$x^2 - \frac{F}{a}x = -\frac{a^2}{4}$$

ist, woraus folgt $x = \frac{F \pm \sqrt{F^2 - a^4}}{2a}$. Der Grenzwert ist $F = a^2$, wobei $x = \frac{a}{2}$ wird. Der kleinste umbeschriebene Rhombus ist demnach das Quadrat.

Fig. 208.



5) **Aufgabe.** Welches ist der Rhombus von kleinster Fläche, der sich einem Kreise umbeschreiben läßt?

Auflösung. Ist x die Seite eines umbeschriebenen Rhombus, so ist die Fläche $F = 2xr$, also $x = \frac{F}{2r}$; sind ferner y und z die Halbdiagonalen, so ist $F = 2yz$ und zugleich $z^2 + y^2 = x^2 = \frac{F^2}{4r^2}$. Es folgt $y^2 + z^2 \pm 2yz = \frac{F^2}{4r^2} \pm F$, d. h. $y + z = \sqrt{\frac{F^2}{4r^2} + F}$, $y - z = \sqrt{\frac{F^2}{4r^2} - F}$, woraus sich y und z für jedes F ergeben, sobald nur nicht $\frac{F^2}{4r^2} < F$, d. h. $F < (2r)^2$ ist. Der kleinste umbeschriebene Rhombus, der möglich ist, ist demnach das Quadrat. —

In solcher Weise lassen sich mit Hülfe der quadratischen Gleichungen zahlreiche Aufgaben über Maxima und Minima zur Lösung bringen.

6) Von Wichtigkeit sind die sogenannten isoperimetrischen Probleme, bei denen es sich darum handelt, unter den Figuren gleichen Umfangs diejenige zu ermitteln, die den größten Inhalt hat. Ohne auf die langwierigere Behandlung näher einzugehen, kann sich die Schule auf folgende Andeutungen beschränken:

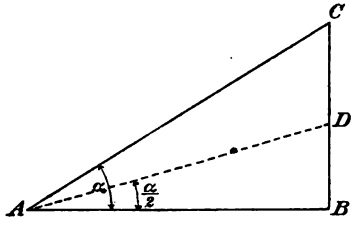
Unter den Dreiecken gleichen Umfangs über derselben Grundlinie ist das gleichschenklige das größte, folglich unter den Dreiecken gleichen Umfangs überhaupt das gleichseitige. Ebenso ist das Quadrat unter den Vierecken gleichen Umfangs das größte.

Unter den regelmäßigen Flächen desselben Umfangs ist die größte

Digitized by Google

der Kreis. In Fig. 209 ist nämlich, da α halbiert ist, $AB : AC = BD : DC$, folglich $BD < CD$, d. h. $2 \tan \frac{\alpha}{2} < \tan \alpha$. Fortgesetzte Halbierung ergiebt $4 \tan \frac{\alpha}{4} < 2 \tan \frac{\alpha}{2}$, $8 \tan \frac{\alpha}{8} < 4 \tan \frac{\alpha}{4}$ u. s. w. Durch einfache Betrachtungen ergiebt sich überhaupt, daß $n \tan \frac{\alpha}{n}$ um so kleiner ist, je größer man n nimmt. Nun ist beim regelmäßigen n-Eck $F = \frac{u}{2} \varrho$, und, da $\frac{2\pi}{2n}$ oder $\frac{\pi}{n}$ der halbe Centriwinkel ist,

Fig. 209.



$$\varrho = \frac{\frac{u}{2n}}{\tan \frac{\pi}{n}} = \frac{u}{2} \cdot \frac{1}{n \tan \frac{\pi}{n}},$$

also

$$F = \frac{u^2}{4} \cdot \frac{1}{n \tan \frac{\pi}{n}}.$$

Je größer n ist, um so kleiner ist nach Obigem der Nenner, um so größer die Fläche des Polygons von gegebenem Umfang u. Das größte also ist der Kreis. (Für diesen ist $r^2\pi = \frac{(2r\pi)^2}{4} \cdot \frac{1}{n \tan \frac{\pi}{n}} = r^2\pi^2 \cdot \frac{1}{n \tan \frac{\pi}{n}}$, so daß $n \cdot \tan \frac{\pi}{n}$ für $n = \infty$ seinen kleinsten Wert π haben muß. In der That darf man bei großem n setzen: $\tan \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n}$.)

Alle behandelten Aufgaben lassen noch andere, rein geometrische Behandlung zu. In dieser Beziehung sei jedoch auf die Originalarbeiten Steiners und anderer verwiesen.

7) In der analytischen Geometrie handelt es sich bei der Untersuchung der Maxima und Minima um das Auffinden der Stellen, wo die Tangente der Curve horizontal ist.

Will man zum Beispiel durch Rechnung untersuchen, wo sich solche Stellen bei dem durch die allgemeine Gleichung 2ten Grades

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

gegebenen Kegelschnitte befinden, so berechne man aus dieser Gleichung x, was einen Ausdruck giebt, der im allgemeinen eine Quadratwurzel enthält, unter der y vorkommt. Mit dieser Wurzel wird dann wie früher verfahren, d. h. der unter ihr stehende Ausdruck wird gleich Null gesetzt und aus ihm y als Grenzwert berechnet.

Digitized by Google

8) Bei Ausdrücken höheren Grades, die nur x enthalten, empfiehlt sich folgende, an einem Beispiele 3ten Grades erläuterte Methode.

Ist 1) $$y = a + bx + cx^2 + dx^3,$$

so ist y ein Maximum, wenn für jeden Nachbarwert x_1 das entsprechende $y_1 < y$ ist, also wenn

$$a + bx + cx^2 + dx^3 > a + bx_1 + cx_1^2 + dx_1^3$$

oder

$$b(x - x_1) + c(x^2 - x_1^2) + d(x^3 - x_1^3) > 0,$$

oder

$$(x - x_1)[b + c(x + x_1) + d(x^2 + xx_1 + x_1^2)] > 0$$

d. h. positiv ist. Demnach müssen die Hauptfaktoren beide zugleich (d. h. für denselben Wert von x) positiv, oder beide zugleich negativ, oder beide zugleich Null sein. Der erste wird Null für $x = x_1$, folglich wird auch der zweite Null für $x = x_1$, so daß für $x = x_1$

2) $$b + 2cx + 3dx^2 = 0$$

ist. Hieraus läßt sich x berechnen und der Wert in die Gleichung für y einsetzen.

Handelt es sich z. B. um $y = bx - x^3$, so wird Gleichung 2) die folgende Form annehmen:

$$b - 3x^2 = 0,$$

folglich findet das Maximum statt für $x = b\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Die Gleichung 2) läßt sich aus der Gleichung 1) sofort dadurch ableiten, daß an Stelle jedes Ausdrucks kx^p der Ausdruck pkx^{p-1} tritt. Ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt, kann bisweilen zweifelhaft bleiben, wird aber dann bequem durch probeweises Einsetzen nach Nachbarwerten von x in die Gleichung für y bestimmt, wobei sich zeigt, ob diese größere oder kleinere Werte geben.

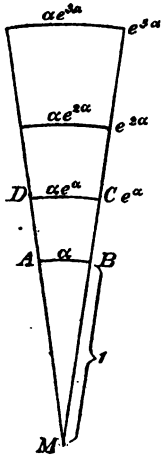
Eingehendere Untersuchungen würden das Gebiet der Schule überschreiten.

Digitized by Google

III. Die Quadrateinteilung der Ebene mittels der Polarkoordinaten.

Bei den kartographischen Betrachtungen in Abschnitt XII der Geometrie und Abschnitt IX der Stereometrie spielte die Einteilung der Ebene in unendlich kleine „Quadrate" eine bedeutende Rolle. Dabei war behauptet worden, daß diese Teilung durch Polarkoordinaten erzielt werden kann, wenn man die Längen der Radien im Verhältnis $e^0 = 1$, e^{α}, $e^{2\alpha}$, $e^{3\alpha}$, ... auf einander folgen läßt, ihre Neigungen aber, am Einheitskreise gemessen, nach der Reihe 0, α, 2α, 3α u. s. w. Der Beweis ergiebt sich folgendermaßen:

Fig. 210.



In Fig. 210 sei $MA = 1$, $\overset{\frown}{AB} = \alpha$, $MD = e^{\alpha}$, wobei α sehr klein im Verhältnis zu 1 zu denken ist. Dann ist nach Nr. 42 der Arithmetik

$$e^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} + \frac{\alpha^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots,$$

folglich

$$AD = e^{\alpha} - 1 = \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} + \frac{\alpha^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots,$$

was bei kleinem α eine sehr schnell konvergierende Reihe ist (bei $\alpha = \frac{1}{1000}$ ist das zweite Glied bereits $\frac{1}{2\,000\,000}$), so daß bei verschwindend kleinem α nur das erste Glied nötig und dann für die Grenze $AD = \alpha$ ist.

Ebenso ist $\overset{\frown}{DC} = \alpha \cdot \frac{e^{\alpha}}{1} = \alpha + \frac{\alpha^2}{1} + \frac{\alpha^3}{1 \cdot 2} + \frac{\alpha^4}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$, so daß für die Grenze ebenfalls $\overset{\frown}{DC} = \alpha$ ist. Für unendlich kleines α ist also $\overset{\frown}{AB} = AD = \overset{\frown}{DC} = BC$, d. h. $ABCD$ ein „Quadrat".

Je vier um einen Punkt herum liegende „Quadrate" dieser Art stellen wieder einen Flächenraum dar, der einem wirklichen Quadrate zu entsprechen hat. Dann handelt es sich z. B. um $MA = 1$, $\overset{\frown}{AB} = 2\alpha$, $MD = e^{2\alpha}$. Ebenso ist es bei $MA = 1$, $\overset{\frown}{AB} = n\alpha$, $MD = e^{n\alpha}$. Also auch $n \cdot n$ „Quadrate" entsprechen einem quadratischen Flächenraume, und die Beziehung zwischen $\overset{\frown}{A_1B_1}$ und M_1D_1 bleibt dabei erhalten, d. h. ist $\overset{\frown}{A_1B_1} = \alpha$, so ist $M_1D_1 = e^{\alpha}$, folglich $\overset{\frown}{A_1B_1} = {}^{e}\lg M_1D_1$.

Digitized by Google

Bei den früheren Betrachtungen war $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ gesetzt, die Längen der Radien waren also

$$\ldots, e^{\frac{-6\pi}{n}}, e^{\frac{-4\pi}{n}}, e^{\frac{-2\pi}{n}}, 1, e^{\frac{2\pi}{n}}, e^{\frac{4\pi}{n}}, e^{\frac{6\pi}{n}}, \ldots,$$

ihre Neigungen dagegen

$$\ldots, \frac{-6\pi}{n}, \frac{-4\pi}{n}, \frac{-2\pi}{n}, 0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \frac{6\pi}{n}, \ldots.$$

Die Umkehrung der stereographischen Projektion überträgt die Quadratteilung auf die Kugel, die in M auf die Ebene der Zeichnung gelegt zu denken ist. Ist ihr Radius $r = \frac{1}{2}$, so wird der Einheitskreis auf den Äquator projiziert. Damit sind die besprochenen kartographischen Dinge in jeder Beziehung erledigt. Mit der genannten Konstruktion ist zugleich das Bild der loxodromischen Linie, d. h. die sog. logarithmische Spirale für den Schnittwinkel 45^0 mit beliebiger Genauigkeit konstruiert. Sie ist als Diagonalkurve in das Quadratnetz einzuzeichnen.

Nimmt man statt der „Quadrate" ähnliche „Rechtecke", so erhält man logarithmische Spiralen und Loxodromen, welche das Büschel der Radien bezw. Meridiane unter einem anderen Winkel schneiden.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google